Речь товарища И. В. СТАЛИНА на приеме в Кремле работников высшей школы 17 мая 1938 г.

Товарищи!

Разрешите провозгласить тост за науку, за ее процветание, за здоровье людей науки.

За процветание науки, той науки, которая не отгораживается от народа, не держит себя вдали от народа, а готова служить народу, готова передать народу все завоевания науки, которая обслуживает народ не по принуждению, а добровольно, с охотой (аплодисменты).

За процветание науки, той науки, которая не дает своим старым и признанным руководителям самодовольно замыкаться в скорлупу жрецов науки, в скорлупу монополистов науки, которая понимает смысл, значение, всесилие союза старых работников науки с молодыми работниками науки, которая добровольно и охотно открывает все двери науки молодым силам нашей страны и дает им возможность завоевать вершины науки, которая признает, что будущность принадлежит молодежи от науки (аплодисменты).

За процветание науки, той науки, люди которой, понимая силу и значение установившихся в науке традиций и умело используя их в интересах науки, все же не хотят быть рабами этих традиций, которая имеет смелость, решимость ломать старые традиции, нормы, установки, когда они становятся устарелыми, когда они превращаются в тормоз для движения вперед, и которая умеет создавать новые традиции, новые нормы, новые установки (аплодисменты).

Наука знает в своем развитии не мало мужественных людей, которые умели ломать старое и создавать новое, несмотря ни на какие препятствия, вопреки всему. Такие мужи науки, как Галилей, Дарвин и многие другие общеизвестны. Я хотел бы остановиться на одном из таких корифеев науки, который является вместе с тем величайшим человеком современности. Я имею в виду Ленина, нашего учителя, нашего воспитателя (аплодисменты). Вспомните 1917 год. На основании научного анализа общественного развития России, на основании научного анализа международного положения Ленин пришел тогда к выводу, что единственным выходом из положения является победа социализма

в России. Это был более, чем неожиданный вывод для многих людей науки того времени. Плеханов, один из выдающихся людей науки, с презрением говорил тогда о Ленине, утверждая, что Ленин находится «в бреду». Другие, не менее известные люди науки, утверждали, что «Ленин сошел с'ума», что его следовало бы упрятать куда нибудь подальше. Против Ленина выли тогда все и всякие люди науки как против человека, разрушающего науку. Но Ленин не убоялся пойти против течения, против косности. И Ленин победил (аплодисменты).

Вот вам образец мужа науки, смело ведущего борьбу против устаревшей науки и прокладывающего дорогу для новой науки.

Бывает и так, что новые пути науки и техники прокладывают иногда не общеизвестные в науке люди, а совершенно неизвестные в научном мире люди, простые люди, практики, новаторы дела. Здесь за общим столом сидят товарищи Стаханов и Папанин. Люди, неизвестные в научном мире, не имеющие ученых степеней, практики своего дела. Но кому неизвестно, что Стаханов и стахановцы в своей практической работе в области промышленности опрокинули существующие нормы, установленные известными людьми науки и техники, как устаревшие, и ввели новые нормы, соответствующие требованиям действительной науки и техники? Кому неизвестно, что Папанин и папанинцы в своей практической работе на дрейфующей льдине мимоходом, без особого труда, опрокинули старое представление об Арктике, как устаревшее, и установили новое, соответствующее требованиям действительной науки? Кто может отрицать, что Стаханов и Папанин являются новаторами в науке, людьми нашей передовой науки?

Вот какие еще бывают «чудеса» в науке.

Я говорил о науке. Но наука бывает всякая. Та наука, о которой я говорил, называется ПЕРЕДОВОЙ наукой.

За процветание нашей передовой науки!

За здоровье людей передовой науки!

За здоровье Ленина и ленинизма!

За здоровье Стаханова и стахановцев!

За здоровье Папанина и папанинцев! (аплодисменты).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ $|x|^p$ ПРИ ПОМОЩИ МНОГОЧЛЕНОВ ВЕСЬМА ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

В статье дается асимптотическое значение наилучшего приближения $E_n|x|^p$ на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочленов весьма высокой степени.

1. В настоящей статье дается доказательство того факта, что *наилучшее приближение $E_n|x|^p$ на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочленов весьма высокой степени n удовлетворяет асимптотическому равенству* *

$$E_n|x|^p \sim \frac{\mu(p)}{n^p} \qquad (n \to \infty), \tag{1}$$

где $\mu(p)$ не зависит от n.

Исходным пунктом нашего исследования будет формула

$$n^p|x|^p = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi p}{2}\cos n \arcsin x \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{n^2x^2}\right)} + R_n(x) + \varepsilon_n, \tag{2}$$

где, при данном $p > 0$, многочлен $R_n(x)$ четной степени n возрастает не быстрее n^p на отрезке $(-1, +1)$, а ε_n равномерно стремится к нулю на этом отрезке, когда $n \to \infty$. Вывод этой формулы дан в моей монографии «Экстремальные свойства полиномов», глава II, § 6 (1937).

Таким образом, полагая

$$H_p(t) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi p}{2}\int_0^\infty \frac{u^{p-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{t^2}\right)},$$

мы имеем

$$n^p E_n|x|^p = E_n(H_p(nx)\cos n \arcsin x + \varepsilon_n). \tag{3}$$

---

* Для случая $p=1$ это было мною доказано в статье «Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$», Acta Mathematica, 1913, а также в моей докторской диссертации «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени», Сообщения Харьковского математического общества, 1912.

Следовательно, требуется доказать, что $E_n(H_p(nx)\cos n \arcsin x)$ стремится к определенному конечному пределу $\mu(p)$, когда $n \to \infty$. Очевидно, кроме того, что

$$E_n(\cos n \arcsin x\, H_p(nx)) = E_n(\cos n \arcsin x\, G_p(nx)),$$

где

$$G_p(t) = H_p(t) - H_p(\infty) = -\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi p}{2}\int_0^\infty \frac{u^{p+1}\,du}{(e^u - e^{-u})(u^2+t^2)}. \tag{4}$$

С другой стороны, так как

$$G_p(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \tag{5}$$

и

$$|\cos n \arcsin x - \cos nx| < n\,|\arcsin x - x| = O(nx^3), \tag{6}$$

следовательно, при $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$(\cos nx - \cos n \arcsin x)\, G_p(nx) = O\left(\frac{nx^3}{n^2x^2}\right) = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

Поэтому

$$|n^p E_n|x|^p - E_n(f_p(nx))| < \alpha, \tag{7}$$

где $f_p(nx) = \cos nx\, G_p(nx)$, причем α стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

2. Итак, обозначим через

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{8}$$

многочлен степени n, наименее уклоняющийся от $f(nx)$ на отрезке $(-1, +1)$ (для упрощения письма мы опускаем индекс p и пишем $f(nx) = f_p(nx)$). Так как функция $f(nx)$ ограничена, следовательно, и многочлен $P_n(x)$ ограничен на отрезке $(-1, +1)$: пусть $P_n(x) \leqslant M$. В таком случае, вследствие известных неравенств В. Маркова (k четное число, коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю)

$$|a_k| \leqslant M\frac{n^2(n^2-4)\ldots[n^2-(k-2)^2]}{k!} < M\frac{n^k}{k!}. \tag{9}$$

Следовательно, полагая $nx = t$, имеем

$$P_n\left(\frac{t}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\frac{t}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k, \tag{10}$$

где $|c_k| < \frac{M}{k!}$. Таким образом, $P_n\left(\frac{t}{n}\right)$ принадлежит к классу

целых функций* $\varphi(t)=\sum_0^\infty c_k t^k$ первой степени, коэффициенты которых удовлетворяют неравенству

$$|c_k| \leqslant \frac{M_1}{k!} \tag{11}$$

при всех значениях k, каково бы ни было данное число $M_1 \geqslant M$.

Вместе с тем $E_n(f(nx))$ является также наилучшим приближением $f(t)$ на отрезке $(-n, n)$ при помощи многочленов степени n. Следовательно,

$$E_n(f(nx)) \geqslant A_n(f(t)), \tag{12}$$

где $A_n(f(t))$ означает наилучшее приближение функции $f(t)$ на отрезке $(-n, n)$ посредством целых функций первой степени, удовлетворяющих неравенству (11).

Так как, при возрастании n, $A_n(f(t))$ не может убывать, следовательно, $A_n(f(t))$ стремится к вполне определенному пределу $A(f(t))$. Принимая во внимание, что предел целых функций рассматриваемого класса принадлежит к тому же классу, заключаем, что *существует целая функция* $\Phi(t)$ *первой степени, которая наименее уклоняется от* $f(t)$ *на всей вещественной оси, и соответствующее наилучшее приближение (наименьшее уклонение) равно* $A(f(t))$. (Заметим, что то же рассуждение справедливо по отношению ко всякой данной функции, ограниченной на всей вещественной оси.) Следует лишь заметить, что целая функция $\Phi(t)$ первой степени, наименее уклоняющаяся на всей вещественной оси от данной ограниченной функции $f(t)$, всегда удовлетворяет неравенствам вида (11), так как максимум модуля последовательных производных целой функции первой степени на всей вещественной оси не превышает максимума модуля самой функции.

Следовательно, как бы мало ни было $\alpha > 0$, при n достаточно большом, имеем неравенство

$$E_n(f(nx)) > A(f(t)) - \alpha, \tag{13}$$

откуда вследствие (7) получаем

$$n^p E_n|x|^p > A(f(t)) - 2\alpha. \tag{14}$$

---

* Целая функция $\varphi(t)$ называется функцией степени p, если она удовлетворяет условию $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\varphi^{(n)}(0)|} = p$.

3. Итак, пусть $\Phi(t)$ будет целой функцией первой степени, наименее уклоняющейся от $f(t)$ на всей вещественной оси; в виду ее ограниченности можем разложить ее в ряд

$$\Phi(t)=\Phi(0)+\frac{t}{\pi}\cos t\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^i\,\Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[t-\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right]}, \qquad (15)$$

сходящийся для всех конечных значений t. Кроме того, можно указать такие две постоянные $A>0$, $b>0$, чтобы при всех вещественных t соблюдалось неравенство

$$\left|\frac{t\cos t}{\pi}\right|\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[t-\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right]}\right|<A\log(|t|+b), \qquad (16)$$

и, с другой стороны, если $|t|<\lambda\geqslant 3$, то

$$\sum_{|i|\geqslant\lambda}\left|\frac{t}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[t-\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right]}\right|<2|t|\int_{\lambda-\frac{3}{2}}^{\infty}\frac{dz}{z(\pi z-|t|)}=$$

$$=-2\log\left(1-\frac{|t|}{\pi\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)}\right)<\varepsilon, \qquad (17)$$

где $\varepsilon\to 0$, когда $\frac{t}{\lambda}\to 0$.

Построим многочлен степени n:

$$Q_n(t)=\Phi(0)+\frac{t}{\pi}\cos n\arcsin\frac{t}{n}\sum_{i=-[\log^2 n\sqrt{n}]}^{[\log^2 n\sqrt{n}]}\frac{(-1)^i\,\Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[t-n\sin\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}\right]}=$$

$$=\Phi(0)+\frac{x}{\pi}\cos n\arcsin x\sum_{i=-[\log^2 n\sqrt{n}]}^{[\log^2 n\sqrt{n}]}\frac{(-1)^i\,\Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[x-\sin\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}\right]}. \qquad (18)$$

Прежде всего заметим, что при $-1\leqslant x\leqslant 1$

$$Q_n(nx)=Q_n(t)=O(n^2\log n), \qquad (19)$$

так как

$$\frac{\cos n\arcsin x}{x-\sin\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}}\leqslant n^2.$$

Покажем, кроме того, что, как бы мало ни было $\alpha > 0$, *при* $-\frac{\log n}{\sqrt{n}} \leqslant x \leqslant \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ *имеет место неравенство*

$$|\Phi(t) - Q_n(t)| < \alpha, \tag{20}$$

если только n достаточно велико.

Вследствие неравенства (17) для этого достаточно будет убедиться, что

$$\frac{x}{\pi} \sum_{i=-[\log^2 n\sqrt{n}]}^{[\log^2 n\sqrt{n}]} (-1)^i \frac{\Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{i-\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos nx}{x - \frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi} - \frac{\cos n \arcsin x}{x - \sin\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi}\right] \tag{21}$$

стремится к нулю, когда x находится в рассматриваемом промежутке. Пусть, для определенности, $x > 0$, и положим

$$\sin\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi \leqslant x < \sin\frac{i_0+\frac{1}{2}}{n}\pi \quad (i_0 \geqslant 0).$$

Рассмотрим сначала член суммы (21), соответствующий $i = i_0$; в таком случае

$$x = \frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\delta}{n} = \sin\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\delta_1}{n} = \sin\left(\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\delta_2}{n}\right),$$

где $0 \leqslant \delta_2 < \pi$,

$$\delta_1 - \delta = n\left[\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi - \sin\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi\right] = \frac{\theta\pi^3\left(i_0-\frac{1}{2}\right)^3}{6n^2},$$

$$\delta_1 = \delta_2 \cos\left[\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\theta'\delta_2}{n}\right] \quad (0 < \theta < 1;\ 0 < \theta' < 1).$$

Таким образом

$$\left|\frac{\cos nx}{x - \frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi} - \frac{\cos n \arcsin x}{x - \sin\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi}\right| = n\left|\frac{\sin\delta}{\delta} - \frac{\sin\delta_2}{\delta_1}\right| <$$

$$< n|\delta - \delta_1| + n\left|\frac{\delta_1-\delta_2}{\delta_1}\right| < \frac{\pi^3}{6n}\left(i_0-\frac{1}{2}\right)^3 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\left(i_0+\frac{1}{2}\right) \tag{22}$$

(так как из неравенства $\left|\frac{\sin\delta}{\delta}\right| \leqslant 1$, имеющего место при всех вещественных значениях δ, вытекает $\left|\frac{\sin\delta}{\delta} - \frac{\sin\delta_1}{\delta_1}\right| \leqslant |\delta - \delta_1|$).

Поэтому член с индексом i_0 в сумме (21) будет порядка $\frac{x}{n} i_0^2 = O\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n}}\right)$.

Так как то же замечание применимо к индексу $i = i_0 + 1$, мы можем ограничиться рассмотрением только тех значений i, для которых

$$\left|x - \frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right| > \frac{\pi}{n}.$$

В таком случае

$$\frac{x-\sin\dfrac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi}{x-\dfrac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi}=1+\frac{\theta}{6}\left(i-\frac{1}{2}\right)^3\frac{\pi^2}{n^2}\quad (|\theta|<1).$$

Следовательно, соответствующие члены суммы (21) могут быть представлены в виде

$$(-1)^i\frac{\Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)x(\cos nx-\cos n\arcsin x)}{\pi\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}+a_i\frac{x\left(i-\frac{1}{2}\right)^2}{n^2\left[x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]},$$

где числа a_i ограничены. При этом

$$\frac{1}{n}\sum_{\left|x-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right|>\frac{\pi}{n}}^{|i|\leqslant\log^2 n\sqrt{n}}\frac{1}{x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}=O(\log n),$$

$$\sum_{\left|x-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right|>\frac{\pi}{n}}^{|i|\leqslant\log^2 n\sqrt{n}}\frac{x}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}=$$

$$=\sum\left[\frac{1}{i-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{\pi}{n}}{x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}\right]=O(\log n),$$

$$\cos nx-\cos n\arcsin x=O(nx^3).$$

Поэтому вся сумма (21) будет порядка

$$O\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n}}\right)+O(x^3 n\log n)+O(x\log^5 n)=O\left(\frac{\log^6 n}{\sqrt{n}}\right)$$

и таким образом неравенство (20) установлено.

Отсюда следует, что *многочлен $Q_n(nx)$ степени n на отрезке $\left(-\frac{\log n}{\sqrt{n}},\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$ приближает функцию $f(nx)$ с точностью $A(f(t))+\alpha$, т. е.*

$$|Q_n(nx)-f(nx)|<A(f(t))+\alpha. \tag{23}$$

4. Обозначим через $E_n^*|x|^p$ *наилучшее приближение $|x|^p$ на отрезке $\left(-\frac{\log n}{\sqrt{n}},\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$ при помощи многочленов $P_n^*(x)$ степени n, подчиненных условию, что $|P_n^*(x)|\leqslant n^{3+p}$ на всем отрезке $(-1,+1)$.* В таком случае, принимая во внимание (19) и (23), имеем при n достаточно большом

$$n^p E_n^*|x|^p<A(f(t))+2\alpha, \tag{24}$$

так как согласно замечанию, сделанному вначале, разность $|f(nx)-n^p|x|^p|$ при добавлении к ней некоторого многочлена степени n, возрастающего на отрезке $(-1, +1)$ не быстрее, чем n^p, остается по модулю меньше α на этом отрезке.

Рассмотрим далее многочлен S_n степени n, дающий наилучшее взвешенное приближение $E_n(|x|^p; (1-x^2)^h)$ при весе $(1-x^2)^h$ функции $|x|^p$ на отрезке $(-1, +1)$, т. е. обращающий в минимум уклонение произведения $(1-x^2)^h[|x|^p-S_n(x)]$ на отрезке $(-1, +1)$. Положим $h=\frac{cn}{\log n}$ (выбирая постоянную c так, чтобы h было целым числом). Очевидно,

$$E_n(|x|^p; (1-x^2)^h) \geqslant E_m(|x|^p(1-x^2)^h) >$$

$$> E_m|x|^p - \sum_{i=1}^{h} \frac{h!}{i!(h-i)!} E_m|x|^{p+2i}, \qquad (25)$$

где $m=n+2h$.

Но, как установлено в моей выше цитированной книге (стр. 100), при всяком $p>0$ имеют место неравенства

$$\frac{C_p}{n^p} > E_n|x|^p > \frac{C_p}{n^p}\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad (26)$$

где

$$C_p = \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi p}{2}\right| \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\,du}{e^u+e^{-u}} = \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi p}{2}\right| \Gamma(p) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^p}. \qquad (27)$$

Следовательно, можно указать такую постоянную a_p, что при всяком целом $l>0$

$$\frac{C_{p+2l}}{C_p} < p(p+1)\ldots(p+2l-1)\,a_p,$$

а потому существует такая постоянная $b_p = 2\sqrt{2}\left(\frac{4+\pi}{\pi}\right)^p a_p$, что

$$\frac{E_n|x|^{p+2l}}{E_n|x|^p} < \frac{p(p+1)\ldots(p+2l-1)}{n^{2l}}\, b_p. \qquad (28)$$

Таким образом

$$E_n(|x|^p; (1-x^2)^h) > E_m|x|^p\left[1 - b_p\sum_{i=1}^{h}\frac{h!\,p(p+1)\ldots(p+2i-1)}{i!\,(h-i)!\,m^{2i}}\right] >$$

$$> E_m|x|^p\left[1 - b_p\sum_{i=1}^{h}(p+1)^i\left(\frac{h+p+i}{2m}\right)^{2i}\right] >$$

$$> E_m|x|^p\left[1 - 2b_p\frac{(p+1)\left(h+\frac{p}{2}\right)^2}{m^2}\right], \qquad (29)$$

так как $\frac{h}{m} \to 0$, а потому

$$(p+1)\left(\frac{h+p+i}{2m}\right)^2 \leqslant (p+1)\left(\frac{2h+p}{2m}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h) \geqslant E_{n\left(1+\frac{2c}{\log n}\right)} |x|^p (1-\varepsilon_n) > \frac{A_p}{n^p}, \tag{30}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, $A_p > 0$ некоторая не зависящая от n постоянная.

5. Покажем, что если $h = \frac{cn}{\log n}$, где $c = 2p+3+\delta$ ($\delta > 0$), то

$$E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h) \leqslant E_n^* |x|^p \tag{31}$$

при достаточно большом n.

В самом деле, допустим, что наше утверждение (31) ложно, и пусть $P_n^*(x)$ будет многочлен степени n, осуществляющий наименьшее уклонение $E_n^*|x|^p$ на отрезке $\left(-\frac{\log n}{\sqrt{n}}, \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$, так что, по условию,

$$\big||x|^p - P_n^*(x)\big| \leqslant E_n^* |x|^p$$

на этом отрезке; в таком случае мы тем более должны были бы иметь в промежутке $\left(-\frac{\log n}{\sqrt{n}}, \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$

$$(1-x^2)^h \big||x|^p - P_n^*(x)\big| \leqslant E_n^*|x|^p < E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h) \tag{32}$$

и, кроме того, так как $|P_n^*(x)| \leqslant n^{3+p}$, мы имели бы и в остальной части отрезка $(-1, +1)$

$$(1-x^2)^h \big||x|^p - P_n^*(x)\big| \leqslant \left(1-\frac{\log^2 n}{n}\right)^{\frac{nc}{\log n}} (n^{3+p}+1) \sim n^{3+p-c} =$$
$$= \frac{1}{n^{p+\delta}} < E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h) \tag{33}$$

благодаря неравенству (30).

Следовательно, если бы (31) было неверно, $E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h)$ не было бы наименьшим уклонением произведения $(1-x^2)^h \big||x|^p - S_n(x)\big|$ на отрезке $(-1, +1)$.

Но из неравенства (31) вытекает, благодаря (24), что

$$n^p E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h) < A(f(t)) + 2\alpha. \tag{34}$$

Поэтому вследствие (30) имеем также

$$(1-\varepsilon_n) m^p E_m |x|^p < \left(1+\frac{2c}{\log n}\right)^p [A(f(t)) + 2\alpha].$$

Таким образом, как бы мало ни было данное $\alpha > 0$, при всяком достаточно большом n

$$m^p E_m |x|^p < A(f(t)) + 3\alpha, \tag{35}$$

и, принимая во внимание (14), мы получаем требуемый результат, а именно, что

$$n^p E_n |x|^p \rightarrow A(f(t)), \tag{36}$$

каков бы ни был закон бесконечного возрастания n.

6. Следовательно, $\mu(p) = A(f(t))$ есть наилучшее приближение функции

$$f(t) = f_p(t) = -\frac{4\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi}\cos t\int_0^\infty \frac{u^{p+1}\,du}{(e^u + e^{-u})(u^2 + t^2)}$$

на всей вещественной оси при помощи целых функций первой степени.

В виду того что функция $f_p(t)$ равномерно непрерывна и имеет ограниченную производную по p при всяком t, функция $\mu(p)$ также непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, так как

$$|A(f_{p_1}(t)) - A(f_p(t))| \leqslant \max_{-\infty < t < \infty} |f_{p_1}(t) - f_p(t)|.$$

Отметим еще, что справедлива также формула

$$\mu(p) = A(F_p(t)), \tag{37}$$

где

$$F_p(t) = \frac{\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}\left[\frac{(t^2 - u^2)\cos t + 2ut\sin t}{u^2 + t^2}\right]du. \tag{38}$$

Действительно, полагая

$$R(t, u) = \frac{(t^2 - u^2)\cos t + 2ut\sin t}{t^2 + u^2},$$

имеем для любого данного u

$$A(R(t, u)) = 1, \tag{39}$$

причем целой функцией первой степени, наименее уклоняющейся от $R(t, u)$, является нуль, так как, в силу теоремы 1 § 11 главы III цитированной выше книги, не существует такой ограниченной на всей вещественной оси целой функции первой степени $\varphi(t)$, что $\varphi(t)\cdot R(t, u) > 0$ во всех точках, где $|R(t, u)| = 1$.

Поэтому для получения целой функции первой степени, наименее уклоняющейся от $\frac{\cos t}{t^2 + u^2}$, нужно лишь подобрать постоянную λ так, чтобы функция

$$\frac{\cos t}{t^2 + u^2} + \lambda\,\frac{(t^2 - u^2)\cos t + 2ut\sin t}{t^2 + u^2}$$

оказалась целой; следовательно,

$$A\left(\frac{\cos t}{t^2 + u^2}\right) = \lambda = \frac{1 + e^{-2u}}{4u^2}.$$

Отсюда следует, что $F_p(t) - f_p(t)$ есть целая функция первой степени; кроме того, из (38) заключаем, что

$$\mu(p) = A(F_p(t)) \leqslant \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} p}{\pi} \right| \Gamma(p). \tag{40}$$

Прежде чем вывести из (38) также и нижнюю границу для $\mu(p)$, укажем еще, что

$$\mu(p) = A(f_p(t)) = A(t^{2k} f_{p-2k}(t)) = A(|t|^p), \tag{41}$$

каково бы ни было целое положительное число $k < \frac{p}{2}$, так как

$$\int_0^\infty \frac{u^{p+1}\, du}{(e^u + e^{-u})(u^2 + t^2)} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{p-1} - t^2 u^{p-3} + \ldots + (-1)^{k-1} t^{2k-2} u^{p-2k+1}}{e^u + e^{-u}} du + (-1)^k \int_0^\infty \frac{t^{2k} u^{p-2k+1}}{(e^u + e^{-u})(u^2 + t^2)} du;$$

при этом для $0 < p < 2$ имеем:

$$f_p(t) = -\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi p}{2} \cos t \int_0^\infty \frac{u^{p+1}\, du}{(e^u + e^{-u})(u^2 + t^2)} =$$

$$= \cos t \left[-C_p + 2t^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^{p-1}}{t^2 - \left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2} \right] + |t|^p, \tag{42}$$

где C_p дано формулой (27). Таким образом, функция $f_p(t)$ является разностью между $|t|^p$ и ее интерполяционной целой функцией первой степени, определенной значениями в точках $\pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ и условием быть асимптотически равной $|t|^p$ при $t = \pm\infty$.

7. Для получения из (38) нижней границы $\mu(p)$ напишем тождество

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} \frac{(t^2 - u^2)\cos t + 2ut \sin t}{t^2 + u^2} du = \frac{(t^2 - p^2)\cos t + 2pt \sin t}{t^2 + p^2} \Gamma(p) + \varphi_p(t),$$

где

$$\varphi_p(t) = \frac{2t}{t^2 + p^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^{p-1}}{u^2 + t^2} [t(p^2 - u^2)\cos t + (p - u)(up - t^2)\sin t]\, du.$$

Поэтому вследствие (38) и (39)

$$A(F_p(t)) > \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} p}{\pi} \right| \Gamma(p) - \max |\varphi_p(t)|. \tag{43}$$

Но

$$\frac{2t}{t^2+p^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}u^{p-1}(p-u)}{u^2+t^2}\,[t(p+u)\cos t+(up-t^2)\sin t]\,du=$$

$$=\frac{2t\,[2pt\cos t+(p^2-t^2)\sin t]}{(t^2+p^2)^2}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{p-1}(p-u)\,du+$$

$$+\frac{2t}{(t^2+p^2)^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}u^{p-1}(p-u)^2}{u^2+t^2}\Big\{t\,[p(p+2u)-t^2]\cos t+$$

$$+[up^2-t^2(u+2p)]\sin t\Big\}\,du. \qquad (44)$$

Следовательно, замечая, что первый из интегралов в правой части равенства (44) равен нулю, и, с другой стороны,

$$|\,t\,[p(p+2u)-t^2]\cos t+[up^2-t^2(u+2p)]\sin t\,|\leqslant(t^2+p^2)\sqrt{t^2+u^2},$$

находим, что при $p>1$

$$|\varphi_p(t)|\leqslant\frac{2t}{t^2+p^2}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-u}u^{p-1}(p-u)^2}{\sqrt{u^2+t^2}}\,du\leqslant\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-u}u^{p-1}(p-u)^2\,du}{\sqrt{u^2+t^2}}<$$

$$<\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{p-2}(p-u)^2\,du=\frac{1}{p}\,[\Gamma(p+1)-2p\Gamma(p)+p^2\Gamma(p-1)]=\frac{1}{p-1}\,\Gamma(p).$$

Поэтому вследствие (43) (при $p>1$)

$$\mu(p)=A\,(F_p(t))>\left|\frac{\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi}\right|\Gamma(p)\Big(1-\frac{1}{p-1}\Big). \qquad (45)$$

Таким образом, из (40) и (45) вытекает, что при $p\to\infty$

$$\mu(p)\sim\frac{\left|\sin\frac{\pi p}{2}\right|}{\pi}\,\Gamma(p), \qquad (46)$$

так как при $p>2$

$$\frac{\left|\sin\frac{\pi p}{2}\right|}{\pi}\,\Gamma(p)>\mu(p)>\frac{\left|\sin\frac{\pi p}{2}\right|}{\pi}\,\Gamma(p)\Big(1-\frac{1}{p-1}\Big). \qquad (47)$$

Примечание. Нетрудно видеть, что при $t=0$

$$F_p(0)=-\frac{\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi}\,\Gamma(p);$$

с другой стороны, каково бы ни было данное $t>0$, имеем

$$F_p(t)=\frac{\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi p}\int_0^\infty pu^{p-1}e^{-u}\cdot\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}\,du=$$

$$=-\frac{\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi p}\int_0^\infty u^p\frac{d}{du}\left[e^{-u}\cdot\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}\right]du.$$

Поэтому, при $p\to 0$, $(t>0)$

$$\lim F_p(t)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{d}{du}\left[e^{-u}\cdot\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}\right]du.$$

Следовательно, замечая, что $\lim\limits_{p=0}F_p(0)=-\frac{1}{2}$, заключаем, что $\lim\limits_{p=0}\mu(p)=\frac{1}{2}$, так что асимптотическое равенство (46) справедливо также и при $p\to 0$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
4. II. 1938.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

SERGE BERNSTEIN

SUR LA MEILLEURE APPROXIMATION DE $|x|^p$ PAR DES POLYNÔMES DE DEGRÉS TRÈS ÉLEVÉS

Cet article contient la déduction de la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $E_n|x|^p$ par des polynômes de degrés très élevés sur le segment $(-1, +1)$.

1. Je me propose de démontrer que *la meilleure approximation $E_n|x|^p$ par des polynômes de degré n sur le segment* $(-1, +1)$ *jouit de la propriété que*

$$E_n|x|^p \sim \frac{\mu(p)}{n^p} \quad (n \to \infty), \tag{1}$$

où $\mu(p)$ est indépendant de n, quel que soit p donné *.

Je prendrai comme point de départ la formule

$$n^p|x|^p = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi p}{2}\cos n \arcsin x \int_0^\infty \frac{u^{p-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{n^2x^2}\right)} + \varepsilon_n + R_n(x) \tag{2}$$

où ε_n tend uniformément vers 0 avec $\frac{1}{n}$, quel que soit $p > 0$ et $-1 \leqslant x \leqslant 1$, et $R_n(x)$ est un polynôme de degré n (pair) qui sur le segment considéré ne croît pas plus vite que n^p.

Pour abréger, je ne m'arrêterai pas ici sur la démonstration de cette formule que j'ai établie dans une monographie recente «Propriétés extrémales des polynômes» (en russe) (pp. 98—102).

Ainsi, on a

$$n^p E_n|x|^p = E_n(H_p(nx)\cos n \arcsin x + \varepsilon_n), \tag{3}$$

en posant

$$H_p(t) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi p}{2}\int_0^\infty \frac{u^{p-1}\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{t^2}\right)}.$$

Il faut donc démontrer que $E_n(H_p(nx)\cos n \arcsin x)$ tend vers une limite (finie) déterminée $\mu(p)$ lorsque $n \to \infty$.

* Pour le cas où $p = 1$ ce fait est établi dans mon Mémoire «Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$», Acta Mathematica, 1913.

Il est d'ailleurs évident que, si l'on pose

$$G_p(t) = H_p(t) - H_p(\infty) = -\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi p}{2}\int_0^\infty \frac{u^{p+1}\,du}{(e^u + e^{-u})\,(u^2 + t^2)}, \qquad (4)$$

on a

$$E_n(\cos n \arcsin x\, H_p(nx)) = E_n(\cos n \arcsin x\, G_p(nx)),$$

puisque $\cos n \arcsin x = T_n(x)$ est un polynôme de degré n.

D'autre part, on a manifestement

$$G_p(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad (5)$$

et

$$|\cos n \arcsin x - \cos nx| < n\,|\arcsin x - x| = O(nx^3). \qquad (6)$$

Donc, pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$E_n(\cos nx\, G_p(nx)) - E_n(\cos n \arcsin x\, G_p(nx)) <$$

$$< \max|(\cos nx - \cos n \arcsin x)\, G_p(nx)| = O\left(\frac{nx^3}{n^2x^2}\right) = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

Ainsi, finalement,

$$|n^p E_n|x|^p - E_n(f_p(nx))| < \alpha \qquad (7)$$

où α tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$ et $f_p(nx) = \cos nx\, G_p(nx)$.

2. Soit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (8)$$

le polynôme d'approximation de $f(nx)$ sur $(-1, +1)$ (pour simplifier l'écriture, nous omettrons l'indice p dans $f_p(nx) = f(nx)$). Puisque $f(nx)$ est borné, $P_n(x)$ est également borné sur le segment $(-1, +1)$: soit $|P_n(x)| \leqslant M$. En vertu des inégalités de W. Markoff on a alors (k pair, les coefficients des puissances impaires sont nuls)

$$|a_k| \leqslant M\frac{[n^2(n^2-4)\ldots[n^2-(k-2)^2]}{k!} < M\frac{n^k}{k!}. \qquad (9)$$

Par conséquent, en posant $nx = t$, on a

$$P_n\left(\frac{t}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\frac{t}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \qquad (10)$$

où $|c_k| < \frac{M}{k!}$. Ainsi, $P_n\left(\frac{t}{n}\right)$ appartient à la classe des fonctions entières $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ de degré* un dont les coefficients satisfont à l'inégalité

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{k!}. \qquad (11)$$

* On dit que la fonction entière $\varphi(t)$ est de degré p, si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\varphi^{(n)}(0)|} = p$.

pour toute valeur de k. $E_n f(nx)$ est en même temps la meilleure approximation de $f(t)$ sur le segment $(-n, n)$ par des polynômes de degré n; nous en concluons que

$$E_n(f(nx)) \geqslant A_n(f(t)) \tag{12}$$

où nous désignons par $A_n(f(t))$ la meilleure approximation de $f(t)$ sur le segment $(-n, n)$ par des fonctions entières de degré un, satisfaisant, de plus, à l'inégalité (11).

Si n croît, $A_n(f(t))$ ne pouvant que croître, tendra vers une limite bien déterminée $A(f(t))$. Puisque la limite des fonctions de la classe considérée appartient à la même classe, *il existera donc une fonction entière $\Phi(t)$ de degré un qui réalisera la meilleure approximation de $f(t)$ sur tout l'axe réel qui sera précisément égale à $Af(t)$*. Observons pour cela ce fait important que si $\Phi(t)$ est une fonction entière de degré un qui réalise la meilleure approximation sur tout l'axe réel d'une fonction bornée $f(t)$, ses coefficients satisfont nécessairement à une inégalité de la forme (11), puisque toute fonction entière bornée de degré un a toutes ses dérivées également bornées.

Donc, quel que petit que soit $\alpha > 0$, on aura pour toute valeur de n assez grande

$$E_n(f(nx)) > A(f(t)) - \alpha, \tag{13}$$

d'où

$$n^p E_n |x|^p > A(f(t)) - 2\alpha. \tag{14}$$

3. Ainsi, soit $\Phi(t)$ la fonction entière de degré un qui réalise la meilleure approximation de $f(t)$ sur tout l'axe réel. Puisqu'elle est bornée, on pourra la mettre sous la forme du développement

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{t}{\pi} \cos t \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^i \Phi\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(i - \frac{1}{2}\right)\left[t - \left(i - \frac{1}{2}\right)\pi\right]} \tag{15}$$

convergent pour toute valeur de t. On peut d'ailleurs fixer deux constantes positives A et b telles que

$$\left|\frac{t}{\pi} \cos t \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\left(i - \frac{1}{2}\right)\left[t - \left(i - \frac{1}{2}\right)\pi\right]}\right|\right| < A \log(|t| + b) \tag{16}$$

pour toute valeur réelle de t; d'autre part, si $|t| < \lambda \geqslant 3$, on a

$$\sum_{|i| \geqslant \lambda} \left|\frac{t}{\left(i - \frac{1}{2}\right)\left[t - \left(i - \frac{1}{2}\right)\pi\right]}\right| < 2|t| \int_{\lambda - \frac{3}{2}}^{\infty} \frac{dz}{z(\pi z - |t|)} =$$

$$= 2 \log\left[1 - \frac{|t|}{\pi\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)}\right] < \varepsilon, \tag{17}$$

où ε tend vers 0 avec $\frac{t}{\lambda}$.

Cela étant, construisons le polynôme de degré n:

$$Q_n(t) = \Phi(0) + \frac{t}{\pi} \cos n \arc \sin \frac{t}{n} \sum_{i=-(\log n)^2 \sqrt{n}}^{(\log n)^2 \sqrt{n}} \frac{(-1)^i \Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[t - n \sin \frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right]} =$$

$$= \Phi(0) + \frac{x}{\pi} \cos n \arc \sin x \sum_{i=-(\log n)^2 \sqrt{n}}^{(\log n)^2 \sqrt{n}} \frac{(-1)^i \Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[x - \sin \frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right]}. \qquad (18)$$

Il est d'abord évident que pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$Q_n(t) = Q_n(nx) = O(n^2 \log n), \qquad (19)$$

puisque

$$\left| \frac{\cos n \arc \sin x}{x - \sin \frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}} \right| \leqslant n^2.$$

Nous allons montrer de plus que, quel que petit que soit $\alpha > 0$, *on a*

$$|\Phi(t) - Q_n(t)| < \alpha, \qquad (20)$$

lorsque

$$-\frac{\log n}{\sqrt{n}} \leqslant x \leqslant \frac{\log n}{\sqrt{n}},$$

si n est suffisamment grand.

D'après la remarque faite plus haut, il suffira de montrer que

$$\frac{x}{\pi} \sum_{i=-(\log n)^2\sqrt{n}}^{(\log n)^2 \sqrt{n}} \frac{(-1)^i \Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{i-\frac{1}{2}} \left[\frac{\cos nx}{x - \frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi} - \frac{\cos n \arc \sin x}{x - \sin \frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi}\right] \qquad (21)$$

tend vers 0 pour toute valeur de x de l'intervalle considéré. Supposons $x > 0$, pour fixer les idées; soit

$$\sin \frac{i_0 - \frac{1}{2}}{n}\pi \leqslant x < \sin \frac{i_0 + \frac{1}{2}}{n}\pi \quad (i_0 \geqslant 0).$$

Considérons le terme de la somme (21), correspondant à $i = i_0$, on a alors

$$x = \frac{i_0 - \frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\delta}{n} = \sin \frac{i_0 - \frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\delta_1}{n} = \sin\left(\frac{i_0 - \frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\delta_2}{n}\right),$$

où $0 \leqslant \delta_2 < \pi$,

$$\delta_1 - \delta = n\left[\frac{i_0 - \frac{1}{2}}{n}\pi - \sin\left(\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\right)\pi\right] = \frac{\theta\pi^3\left(i_0 - \frac{1}{2}\right)^3}{6n^2},$$

$$\delta_1 = \delta_2 \cos\left[\frac{i_0 - \frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{\theta'\delta_2}{n}\right]$$

$$(0 < \theta < 1;\ 0 < \theta' < 1).$$

Ainsi

$$\left|\frac{\cos nx}{x-\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi}-\frac{\cos n \arcsin x}{x-\sin\frac{i_0-\frac{1}{2}}{n}\pi}\right|=n\left|\frac{\sin\delta}{\delta}-\frac{\sin\delta_2}{\delta_1}\right|<n|\delta-\delta_1|+n\left|\frac{\delta_1-\delta_2}{\delta_1}\right|<$$

$$<\frac{\pi^3}{6}\frac{\left(i_0-\frac{1}{2}\right)^3}{n}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\left(i_0+\frac{1}{2}\right) \qquad (22)$$

(car la fonction entière de premier degré $\frac{\sin\delta}{\delta}$ étant inférieure à 1 sur tout l'axe réel, il en est de même de sa dérivée). Donc le terme correspondant de la somme (21) est de l'ordre

$$O\left(\frac{x}{n}i_0^2\right)\leqslant O\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n}}\right).$$

La même remarque étant également applicable à l'indice $i=i_0+1$, nous n'avons qu'à examiner tous les autres indices, pour lesquels

$$\left|x-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right|>\frac{\pi}{n}.$$

Dans ces conditions,

$$\frac{x-\sin\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi}{x-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi}=1+\frac{\theta}{6}\left(i-\frac{1}{2}\right)^3\frac{\pi^2}{n^2} \quad (|\theta|<1).$$

Par conséquent, les termes considérés peuvent être mis sous la forme

$$(-1)^i\frac{\Phi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\pi\left(i-\frac{1}{2}\right)}x\left[\frac{\cos nx-\cos n\arcsin x}{x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}\right]+a_i x\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)^2}{n^2\left[x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}$$

où $a_i=O(1)$ sont bornés. Or,

$$\frac{1}{n}\sum_{\left|x-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\pi\right|>\frac{\pi}{n}}^{|i|\leqslant\log^2 n\sqrt{n}}\frac{1}{x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}=O(\log n).$$

D'autre part,

$$\cos nx-\cos n\arcsin x=O(nx^3)$$

et

$$\sum\frac{x}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left[x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right]}=\sum\left[\frac{1}{i-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{\pi}{n}}{x-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}\right]=O(\log n).$$

Donc la somme de tous les termes est de l'ordre

$$O(x^3 n\log n)+O(x\log^5 n)=O\left(\frac{\log^6 n}{\sqrt{n}}\right)$$

et l'inégalité (20) se trouve ainsi établie.

Il en résulte que *le polynôme $Q_n(nx)$ fournit sur le segment* $\left(-\frac{\log n}{\sqrt{n}}, \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$ *une approximation de $f(nx)$ qui ne dépasse pas* $A(f(t))+\alpha$:

$$|Q_n(nx)-f(nx)| < A(f(t))+\alpha. \tag{23}$$

4. Par conséquent, si nous désignons par $E_n^*|x|^p$ *la meilleure approximation de $|x|^p$ sur le segment* $\left(-\frac{\log n}{\sqrt{n}}, \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$ *par des polynômes de degré n dont le module ne dépasse pas n^{3+p} sur tout le segment* $(-1,+1)$, on aura a fortiori pour toute valeur de n assez grande (en tenant compte de (19))

$$n^p E_n^*|x|^p < A(f(t))+2\alpha, \tag{24}$$

car d'après ce qui a été dit au début, le module de la différence $|f(nx)-n^p|x|^p|$ est, à un polynôme croissant moins vite que n^p sur $(-1,+1)$ de degré n près, inférieur à α.

Considérons à présent le polynôme $S_n(x)$ de degré n qui fournit la meilleure approximation $E_n(|x|^p;\,(1-x^2)^h)$ de $(1-x^2)^h[|x|^p-S_n(x)]$ sur le segment $(-1,+1)$. Posons $h=\frac{cn}{\log n}$ (la constante $c>0$ étant choisie de façon que h soit entier). On a évidemment

$$E_n(|x|^p;(1-x^2)^h) \geqslant E_m(|x|^p(1-x^2)^h) >$$
$$> E_m|x|^p - hE_m|x|^{p+2} - \frac{h(h-1)}{2}E_m|x|^{p+4} - \dots, \tag{25}$$

où $m=n+2h$.

Or, on déduit aisement de (2) que pour toutes les valeurs (paires) de n et quel que soit $p>0$,

$$\frac{C_p}{n^p} > E_n|x|^p > \frac{C_p}{n^p}\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)^p \frac{1}{2\sqrt{2}}, \tag{26}$$

où

$$C_p = \frac{4}{\pi}\left|\sin\frac{\pi p}{2}\right| \int_0^\infty \frac{u^{p-1}du}{e^u+e^{-u}} = \frac{4}{\pi}\left|\sin\pi\frac{p}{2}\right|\Gamma(p)\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^p}. \tag{27}$$

Donc

$$\frac{C_{p+2l}}{C_p} < p(p+1)\dots(p+2l-1)\,a_p,$$

où a_p est une constante; donc,

$$\frac{E_n|x|^{p+2l}}{E_n|x|^p} < \frac{p(p+1)\dots(p+2l-1)}{n^{2l}}\,b_p, \tag{28}$$

où $b_p = 2\sqrt{2}\left(\frac{4+\pi}{\pi}\right)^p a_p$.

Par conséquent

$$E_n(|x|^p; (1-x^2)^h) > E_m|x|^p\left[1-b_p\left(h\frac{p(p+1)}{m^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h(h-1)}{2}\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{m^4}+\dots\right)\right] >$$
$$> E_m|x|^p\left[1-b_p\sum_{i=1}^{h}(p+1)^i\left(\frac{h+p+i}{2m}\right)^{2i}\right] >$$
$$> E_m|x|^p\left[1-2b_p\frac{\left(h+\frac{p}{2}\right)^2(p+1)}{m^2}\right] \tag{29}$$

car $\frac{h}{m}\to 0$ $\left(\text{de sorte que } (p+1)\left(\frac{h+p+i}{2m}\right)^2 \leqslant (p+1)\left(\frac{h+\frac{p}{2}}{m}\right)^2 < \frac{1}{2}\right)$.

Donc,

$$E_n(|x|^p;\quad (1-x^2)^h) \geqslant E_{n\left(1+\frac{2c}{\log n}\right)}|x|^p(1-\varepsilon_n) > \frac{A_p}{n^p}, \tag{30}$$

où A_p est une constante positive et $\varepsilon_n \to 0$ avec $\frac{1}{n}$.

5. Je dis que, si $h=\frac{cn}{\log n}$, où $c=2p+3+\delta$ $(\delta>0)$, on a

$$E_n(|x|^p; (1-x^2)^h) \leqslant E_n^*|x|^p \tag{31}$$

pour n suffisamment grand.

En effet, admettons le contraire, et soit $R_n(x)$ le polynôme minimisant correspondant à $E_n^*|x|^p$. On aurait donc par hypothèse

$$\Big||x|^p - R_n(x)\Big| \leqslant E_n^*|x|^p$$

dans l'intervalle $\left(-\frac{\log n}{\sqrt{n}}, \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$ et a fortiori

$$(1-x^2)^h\Big||x|^p-R_n(x)\Big| \leqslant E_n^*|x|^p < E_n\left(|x|^p;\quad (1-x^2)^h\right) \tag{32}$$

dans le même intervalle; de plus, à cause de $|R_n(x)| \leqslant n^{3+p}$, on a sur le reste du segment $(-1, +1)$

$$(1-x^2)^h\Big||x|^p-R_n(x)\Big| \leqslant \left(1-\frac{\log^2 n}{n}\right)^{\frac{nc}{\log n}}(n^{3+p}+1) \sim n^{3+p-c} =$$
$$=\frac{1}{n^{p+\delta}} < E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h) \tag{33}$$

a cause de l'inégalité (30).

Donc, $E_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h)$ ne répresenterait pas la meilleure approximation du produit $(1-x^2)^h\Big||x|^p-S_n(x)\Big|$.

L'inégalité (31) étant ainsi établie, nous déduisons de (24), que

$$n^pE_n(|x|^p;\ (1-x^2)^h) < A(f(t))+2\alpha, \tag{34}$$

et à cause de (30), nous aurons aussi

$$n^p\Big(1+\frac{2c}{\log n}\Big)^p(1-\varepsilon_n)\,E_{n\left(1+\frac{2c}{\log n}\right)}|x|^p<\Big(1+\frac{2c}{\log n}\Big)^p[A\,(f\,(t)+2\alpha)].$$

Donc, pour toute valeur de m assez grande

$$m^pE_m\,|x|^p<A\,(f\,(t))+3\alpha, \tag{35}$$

quel que petit que soit le nombre α donné. En tenant compte de l'inégalité (14) nous arrivons au résultat voulu que

$$n^pE_n\,|x|^p\to A\,(f\,(t)), \tag{36}$$

quelle que soit la loi de croissance de n.

6. Par conséquent, $\mu(p)=A\,(f\,(t))$ est la meilleure approximation de

$$f\,(t)=f_p\,(t)=-\frac{4\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi}\cos t\int_0^\infty\frac{u^{p+1}\,du}{(e^u+e^{-u})\,(u^2+t^2)}$$

sur tout l'axe réel, par des fonctions entières de degré un. La fonction $f_p(t)$ étant uniformément continue et admettant une dérivée par rapport à p bornée, quel que soit t, $\mu(p)$ sera également continue et satisfera à la condition de Lipschitz, puisqu'on a évidemment

$$|A\,(f_{p_1}(t))-A\,(f_p\,(t))\,|\leqslant\max_{-\infty<t<\infty}|f_{p_1}(t)-f_p\,(t)\,|.$$

Indiquons encore que l'on a aussi

$$\mu\,(p)=A\,(F_p\,(t)) \tag{37}$$

où

$$F_p\,(t)=\frac{\sin\pi\frac{p}{2}}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}\Big[\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}\Big]du, \tag{38}$$

car

$$\frac{\cos t}{u^2+t^2}+\lambda\,\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}$$

sera une fonction entière (de premier degré), si $\lambda=\frac{1+e^{-u}}{4u^2}$. La fonction $F_p(t)$ parait plus commode à étudier, car on sait que zéro est la fonction entière de degré un qui s'écarte le moins possible de la fonction sous-intégrale pour u constant et

$$A\Big[\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}\Big]=1. \tag{39}$$

Ainsi, on voit facilement que

$$\mu\,(p)=A\,(F_p\,(t))\leqslant\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2}p}{\pi}\right|\Gamma\,(p). \tag{40}$$

Remarquons aussi que

$$\mu(p)=A\,(f_p\,(t))=A\,(t^{2k}f_{p-2k}(t))=A\,(\,|\,t\,|^p), \tag{41}$$

quel que soit le nombre positif pair $2k < p$, car

$$\int_0^\infty \frac{u^{p+1}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+t^2)} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{p-1} - t^2 u^{p-3} + \ldots + (-1)^{k-1} t^{2k-2} u^{p-2k+1}}{e^u + e^{-u}}\,du + (-1)^k \int_0^\infty \frac{t^{2k} u^{p-2k+1}}{(e^u+e^{-v})(u^2+t^2)}\,du;$$

de plus on a pour $0 < p < 2$

$$f_p(t) = -\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi p}{2}\cos t \int_0^\infty \frac{u^{p+1}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+t^2)} =$$

$$= \cos t\left[-C_p + 2t^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{p-1}}{t^2 - \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}\right] + |t|^p, \qquad (42)$$

où C_p est donné par la formule (27). Ainsi $f_p(t)$ est la différence entre $|t|^p$ et la fonction entière interpolatrice de degré un de $|t|^p$ ayant les points $\pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ pour nœuds, déterminée par la condition complémentaire d'être asymptotiquement égale à $|t|^p$ pour $t = \pm\infty$.

7. En partant de la formule (38), nous pouvons donner une borne inférieure pour $\mu(p)$ dont la précision augmente avec p. A cet effet observons qu'on a identiquement

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} \frac{(t^2-u^2)\cos t + 2ut\sin t}{u^2+t^2}\,du = \frac{(t^2-p^2)\cos t + 2pt\sin t}{t^2+p^2}\Gamma(p) + \varphi_p(t),$$

où

$$\varphi_p(t) = \frac{2t}{t^2+p^2}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{p-1}}{u^2+t^2}[t(p^2-u^2)\cos t + (p-u)(up-t^2)\sin t]\,du =$$

$$= \frac{2t}{t^2+p^2}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{p-1}}{u^2+t^2}[t(p+u)\cos t + (up-t^2)\sin t](p-u)\,du =$$

$$= \frac{2t}{(t^2+p^2)^2}\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}[2tp\cos t + (p^2-t^2)\sin t](p-u)\,du +$$

$$+ \frac{2t}{(t^2+p^2)^2}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{p-1}}{u^2+t^2}\{t[p(p+2u)-t^2]\cos t +$$

$$+ [up^2 - t^2(u+2p)]\sin t\}(p-u)^2\,du. \qquad (43)$$

Or,

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}(p-u)\,du = 0;$$

donc la première intégrale dans la dernière expression de $\varphi_p(t)$ est nulle; et, en remarquant que

$$|t[p(p+2u)-t^2]\cos t + [up^2 - t^2(u+2p)]\sin t| \leqslant (t^2+p^2)\sqrt{u^2+t^2},$$

on a

$$|\varphi_p(t)| \leqslant \frac{2t}{t^2+p^2}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{p-1}(p-u)^2}{\sqrt{u^2+t^2}}\,du < \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-u}u^{p-2}(p-u)^2\,du =$$

$$= \frac{1}{p}[\Gamma(p+1) - 2p\Gamma(p) + p^2\Gamma(p-1)] = \frac{1}{p-1}\Gamma(p). \tag{44}$$

Donc, pour $p > 1$,

$$\mu(p) = A\left[\frac{\sin\pi\frac{p}{2}}{\pi}\left(\Gamma(p)\frac{(t^2-p^2)\cos t + 2pt\sin t}{t^2+p^2} + \varphi_p(t)\right)\right] >$$

$$> \frac{\left|\sin\pi\frac{p}{2}\right|}{\pi}\Gamma(p)\left[1 - \frac{1}{p-1}\right]. \tag{45}$$

Nous concluons de (40) et de (45) que pour $p \to \infty$

$$\mu(p) \sim \frac{\left|\sin\pi\frac{p}{2}\right|}{\pi}\Gamma(p), \tag{46}$$

car on a (pour $p > 2$)

$$\frac{\left|\sin\pi\frac{p}{2}\right|}{\pi}\Gamma(p) > \mu(p) > \frac{\left|\sin\pi\frac{p}{2}\right|}{\pi}\Gamma(p)\left(1 - \frac{1}{p-1}\right). \tag{47}$$

En observant que l'on a pour $t = 0$

$$F_p(0) = -\frac{\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi}\Gamma(p),$$

et d'autre part que pour $t > 0$

$$F_p(t) = -\frac{\sin\frac{\pi p}{2}}{\pi p}\int_0^\infty u^p\frac{d}{du}\left[e^{-u}\cdot\frac{(t^2-u^2)\cos t + 2ut\sin t}{u^2+t^2}\right]du,$$

nous en concluons que pour $p \to 0$, $\lim F_p(0) = -\frac{1}{2}$ et $\lim F_p(t) = \frac{1}{2}\cos t$ pour $t > 0$. Il en résulte que

$$\lim_{p=0}\mu(p) = \frac{1}{2},$$

et par conséquent l'égalité asymptotique (46) est également vraie pour $p \to 0$.

Institut Mathématique V. A. Stekloff
de l'Académie des Sciences de l'URSS.

Reçu
le 4. II. 1938.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

И. И. ПРИВАЛОВ

РАЗЛИЧНЫЕ КЛАССЫ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СВЯЗИ С ИХ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В § 1 изучены три класса A, B, C субгармонических функций внутри единичного шара в направлениях: a) внутренних их свойств, b) свойств граничного характера, c) аналитических представлений, характеризующих функции этих классов.

В § 2 в тех же направлениях a), b) и c) изучены логарифмически субгармонические функции класса H_δ, определяемого аналогично известному классу Рисса аналитических функций.

В § 3 автор имеет целью по-новому получить известные свойства аналитических функций класса H_1, положив в основу изучения характеризующее их свойство граничного характера.

В § 4 установлена формула для предельных значений интеграла типа Коши-Стильтьеса.

§ 1

Будем обозначать через $u(P)=u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ субгармоническую функцию внутри шара с центром в начале координат, радиуса 1, пространства $p \geqslant 2$ измерений. Рассмотрим три класса субгармонических функций, определяемых следующими условиями*:

(A) $\int u^+(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega < K, \qquad r<1;$

(B) $\int\limits_e u^+(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega$ равномерно абсолютно непрерывная функция множества e для $r<1$;

(C) $\int\limits_e |u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})|\, d\omega$ равномерно абсолютно непрерывная функция множества e вблизи $r=1$.

В этих условиях (A), (B) и (C) мы через $d\omega$ обозначаем элемент единичной сферы, через e любое измеримое множество точек единичной сферы.

---

* Функция u класса A характеризуется разложимостью на сумму двух слагаемых, из которых одно есть отрицательная субгармоническая функция, другое — положительная гармоническая ([1]).

Очевидно, что класс A самый широкий из трех вводимых классов субгармонических функций, класс C наиболее узкий, а B — промежуточный между A и C.

Как известно [2], всякая субгармоническая функция $u(P)$ класса A (значит, и подавно функция класса B или C) имеет радиальные предельные значения $u(Q)$ почти всюду на единичной сфере, и эти предельные значения $u(Q)$ образуют суммируемую функцию.

С другой стороны, легко видеть, что для любой субгармонической функции $u(P)$ внутри единичного шара всегда существует конечный или бесконечный предел выражения

$$\int u^+(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega \quad \text{и} \quad \int |u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})|\, d\omega$$

при $r \to 1$.

Это следует из формул

$$\int u(P)\, d\omega = \int u^+(P)\, d\omega - \int u_+(P)\, d\omega,$$
$$\int |u(P)|\, d\omega = \int u^+(P)\, d\omega + \int u_+(P)\, d\omega,$$

если заметить, что выражения $\int u(P)\, d\omega$ и $\int u^+(P)\, d\omega$, по теореме о среднем значении, суть неубывающие функции относительно r. Для функций классов A, B и C эти предельные значения конечны. Естественно возникает мысль сравнить эти предельные значения с числами $\int u^+(Q)\, d\omega$ и $\int |u(Q)|\, d\omega$, где $u(Q)$ радиальные предельные значения функции $u(P)$ на единичной шаровой поверхности. Таким путем мы приходим к характеристическим свойствам субгармонических функций, принадлежащих классам A, B и C:

a) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала классу A, будет:

$$\lim_{r \to 1} \int u^+(P)\, d\omega \quad \text{или} \quad \lim_{r \to 1} \int |u(P)|\, d\omega$$

суть конечные числа. Входящие в это условие пределы, вообще говоря, не совпадают с числами

$$\int u^+(Q)\, d\omega \quad \text{и} \quad \int |u(Q)|\, d\omega,$$

где $u(Q)$ радиальные предельные значения субгармонической функции $u(P)$ на единичной шаровой поверхности, образующие суммируемую функцию *.

b) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала классу B, будет:

$$\lim_{r \to 1} \int u^+(P)\, d\omega = \int u^+(Q)\, d\omega,$$

* Очевидно, в силу общей теоремы теории функций действительного переменного, что

$$\lim_{r \to 1} \int u^+(P)\, d\omega \geqslant \int u^+(Q)\, d\omega, \quad \lim_{r \to 1} \int |u(P)|\, d\omega \geqslant \int |u(Q)|\, d\omega.$$

где $u(Q)$ — радиальные предельные значения субгармонической функции $u(P)$ на единичной шаровой поверхности, образующие суммируемую функцию.

c) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала классу C, будет:

$$\lim_{r\to 1}\int |u(P)|\,d\omega = \int |u(Q)|\,d\omega,$$

где $u(Q)$ — радиальные предельные значения субгармонической функции $u(P)$ на единичной шаровой поверхности, образующие суммируемую функцию.

Доказательство условия a) очевидно, если отметить формулы

$$\int u(P)\,d\omega = \int u^+(P)\,d\omega - \int u_+(P)\,d\omega,$$

$$\int |u(P)|\,d\omega = \int u^+(P)\,d\omega + \int u_+(P)\,d\omega,$$

в которых выражения $\int u(P)\,d\omega$ и $\int u^+(P)\,d\omega$, по теореме о среднем значении, суть неубывающие функции относительно r. Утверждения b) и c) вытекают путем преобразования определяющих условий (B) и (C) в соответственно им равносильные b) и c). Для этого заметим, что из условия (A) [значит, и подавно (B) или (C)] следует стремление субгармонической функции $u(P)$ при $r\to 1$ к суммируемой функции $u(Q)$ почти для всех точек Q единичной шаровой поверхности (²). По известной теореме теории функций действительного переменного заключаем: если выполнено условие (B) [соответственно, условие (C)] и $u^+(P)\to u^+(Q)$, когда $r\to 1$ почти всюду на единичной шаровой поверхности [соответственно, $|u(P)|\to|u(Q)|$], то

$$\int u^+(P)\,d\omega \to \int u^+(Q)\,d\omega$$

[соответственно, $\int |u(P)|\,d\omega \to \int |u(Q)|\,d\omega$].

Обратно, если выполнено условие $\int u^+(P)\,d\omega \to \int u^+(Q)\,d\omega$ [соответственно, $\int |u(P)|\,d\omega \to \int |u(Q)|\,d\omega$], где $u(Q)$ суть суммируемые радиальные предельные значения субгармонической функции $u(P)$, то функция $u(P)$ принадлежит классу B [соответственно, классу C]. Действительно, согласно условию $\lim\limits_{r\to 1} u^+(P) = u^+(Q)$ почти всюду на единичной шаровой поверхности [соответственно, $\lim\limits_{r\to 1}|u(P)| = |u(Q)|$] и $\int u^+(P)\,d\omega \to \int u^+(Q)\,d\omega$ [соответственно, $\int |u(P)|\,d\omega \to \int |u(Q)|\,d\omega$].

Так как функции $u^+(P) = u^+(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ [соответственно, $|u(P)|$] неотрицательны, то, пользуясь теоремой Д. Ф. Егорова, легко

показать, что при наших условиях автоматически будет выполнено соотношение

$$\int_e u^+(P)\, d\omega \to \int_e u^+(Q)\, d\omega$$

[соответственно, $\int_e |u(P)|\, d\omega \to \int_e |u(Q)|\, d\omega$] .

После этого, принимая во внимание, что $\lim_{r\to 1} u^+(P) = u^+(Q)$ почти всюду на единичной шаровой поверхности [соответственно, $\lim_{r\to 1}|u(P)| = |u(Q)|$], заключаем, на основании общей теоремы теории функций действительного переменного: $\int_e u^+(P)\, d\omega$ есть равномерно абсолютно непрерывная функция множества e для $r < 1$ [соответственно, $\int_e |u(P)|\, d\omega$ вблизи $r = 1$] .

Как известно, всякая субгармоническая функция внутри единичного шара, имеющая гармоническую мажоранту в этом шаре, представима в виде суммы двух слагаемых, из которых первое есть потенциал Грина $-\int G(P; Q)\, d\mu(Q)$, а второе—наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$. Заметив это, мы получим аналитические представления функций классов A, B, C, если укажем соответствующие представления для их наилучших гармонических мажорант.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Для того чтобы субгармоническая функция* $u(P)$ *принадлежала одному из классов* A, B, C, *необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшая гармоническая мажоранта принадлежала этому классу.*

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться, что если субгармоническая функция удовлетворяет одному из условий (A), (B), (C), то тому же условию будет удовлетворять ее наилучшая гармоническая мажоранта *.

---

* Обратное заключение для классов A и B очевидно. Для класса C оно получается в силу следующих соображений. Пусть $h(P)$ наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$, удовлетворяющая условию (C), т. е.

$$\int |h(P)|\, d\omega \to \int |h(Q)|\, d\omega,$$

отсюда

$$\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} h(0) = \int h(Q)\, d\omega;$$

с другой стороны, $\dfrac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} h(0) = \lim_{r\to 1} \int u(P)\, d\omega.$

Следовательно, находим:

Пусть субгармоническая функция $u(P)$ удовлетворяет неравенству (A). Покажем, что ее наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ удовлетворяет тому же неравенству. Так как $h(P) = h(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1})$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$ во всем единичном шаре, то для всякой точки P имеем:

$$h(P) = \lim_{R \to 1} h(P; R),$$

где положено

$$h(P; R) = h(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}; R) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u(R, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega; \qquad (1)$$

интегрирование распространено на все точки $Q(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1})$ единичной сферы; γ есть угол между векторами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$, $0 \leqslant r < R < 1$.

Согласно известной теореме теории функций действительного переменного, можем написать:

$$\int h^+(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1})\, d\omega = \int \lim_{R \to 1} h^+(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}; R)\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{R \to 1}} \int h^+(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}; R)\, d\omega,$$

откуда, принимая во внимание (1) и замечая, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega = 1,$$

находим:

$$\int h^+(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1})\, d\omega \leqslant \overline{\lim_{R \to 1}} \int d\omega \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \times$$

$$\times \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega' = \overline{\lim_{R \to 1}} \int u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1})\, d\omega'.$$

$$\lim_{r \to 1} \int u(P)\, d\omega = \int h(Q)\, d\omega = \int u(Q)\, d\omega.$$

Заметив, что

$$\lim_{r \to 1} \int u^+(P)\, d\omega = \int u^+(Q)\, d\omega,$$

мы из двух последних соотношений получим:

$$\lim_{r \to 1} \int |u(P)|\, d\omega = \int |u(Q)|\, d\omega,$$

что и доказывает условие (C) для функции u.

В силу условия (A) последний предел есть конечное постоянное. Итак, мы доказали, что наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ удовлетворяет условию (A).

Пусть теперь субгармоническая функция $u(P)$ удовлетворяет условию (B). Покажем, что ее наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ удовлетворяет тому же условию. Из (1) имеем:

$$h^+(P; R) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2} d\omega}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

По условию нам дано, что $\int\limits_e u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})\, d\omega$ есть равномерно абсолютно непрерывная функция для $R < 1$; отсюда можно заключить, что

$$\lim_{R\to 1} \int u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega =$$
$$= \int u^+(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega. \qquad (2)$$

В самом деле,

$$\int\limits_e u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega <$$
$$< \frac{(R + r) R^{p-2}}{(R - r)^{p-1}} \int\limits_e u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})\, d\omega,$$

что доказывает равномерную абсолютную непрерывность вблизи $R = 1$ левой части, а значит, справедливость соотношения (2) по известной теореме теории функций действительного переменного. Следовательно,

$$h^+(P) = \lim_{R\to 1} h^+(P; R) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \lim_{R\to 1} \int u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \times$$
$$\times \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^+(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \times$$
$$\times \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega = I(u^+; P).$$

Итак, $h^+(P) \leqslant I(u^+; P)$, где $I(u^+; P)$ обозначает интеграл Пуассона, образованный для граничной функции $u^+(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})$ в точке P. Из последнего неравенства получим:

$$\int\limits_e h^+(P)\, d\omega \leqslant \int\limits_e I(u^+; P)\, d\omega < \varepsilon,$$

если mes $e < \eta = \eta(\varepsilon)$. Последнее заключение сделано потому, что правая часть последнего неравенства равномерно абсолютно непрерывна при $r < 1$ (²).

Применяя те же выкладки, аналогично убедимся, что если субгармоническая функция $u(P)$ удовлетворяет условию (С), то тому же условию будет удовлетворять ее наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$.

По доказанной теореме, поставленная выше задача об аналитических представлениях субгармонических функций классов А, В, С приводится к изучению аналитических представлений гармонических функций, принадлежащих классам А, В, С. Как известно (²), гармоническая функция класса А характеризуется ее разложимостью на разность двух положительных гармонических функций или ее аналитическим представлением при помощи интеграла Пуассона-Стильтьеса общего вида, т. е.

$$h(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\psi(e),$$

где $\psi(e) = \psi_1(e) - \psi_2(e)$ есть разность двух неотрицательных, аддитивных, неубывающих, непрерывных снизу функций ψ_1 и ψ_2 открытого множества единичной сферы. Далее гармоническая функция класса C характеризуется ее аналитическим представлением при помощи интеграла Пуассона общего вида (²):

$$h(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, h(Q)\, d\omega,$$

где $h(Q)$ — радиальные предельные значения гармонической функции $h(P)$ на единичной сфере, образующие суммируемую функцию.

Наконец, покажем, что гармоническая функция класса В характеризуется ее аналитическим представлением при помощи интеграла Пуассона-Стильтьеса частного вида, т. е.

$$h(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, h(Q)\, d\omega - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(1-r^2)\, d\psi_2(e)}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}, \tag{3}$$

где $\psi_2(e) \geqslant 0$ имеет производную почти всюду на единичной сфере, равную 0.

В самом деле, обозначая через $I(P)$ интеграл Пуассона, входящий в формулу (3), будем иметь: $h(P) \leqslant I(P)$, откуда $h^+(P) \leqslant I^+(P)$ и, следовательно,

$$\int_e h^+(P)\, d\omega \leqslant \int_e I^+(P)\, d\omega.$$

Заметив, что правая часть последнего неравенства представляет функцию множества e, абсолютно непрерывную равномерно для $r < 1$ ([2]), заключаем, что и левая часть обладает тем же свойством. Обратно, пусть $\int_e h^+(P)\,d\omega$ равномерно абсолютно непрерывная функция множества e при $r < 1$; тогда гармоническую функцию $h(P)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных гармонических функций. Среди всевозможных таких представлений выберем такое $h(P) = p_1(P) - p_2(P)$, что $p_1(P)$ наилучшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $h^+(P)$. Так как по условию $\int_e h^+(P)\,d\omega$ изображает равномерно абсолютно непрерывную функцию для $r < 1$, то по доказанной выше теореме тем же свойством обладает $\int_e p_1(P)\,d\omega$. Если так, то $p_1(P)$ представима интегралом Пуассона, и, возвращаясь к соотношению $h(P) = p_1(P) - p_2(P)$, мы убеждаемся в доказываемом равенстве (3).

Таким образом полностью изучены аналитические аппараты для представления субгармонических функций классов A, B, C. Полагая, в частности, $u(P) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция внутри единичного круга, мы получаем известные классы A, B, C аналитических функций *:

(A) $\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta < K, \quad r < 1;$

(B) $\int_0^{\varphi} \ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ равномерно абсолютно непрерывная функция аргумента φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, для $r < 1$;

(C) $\int_0^{\varphi} |\ln|f(re^{i\theta})||\,d\theta$ равномерно абсолютно непрерывная функция вблизи $r = 1$.

К этим классам аналитических функций приложима, в частности, изложенная теория субгармонических функций. Так, всякая функция $f(z)$ класса A (значит, и подавно функция класса B или C) имеет предельные значения по всем некасательным путям $f(e^{i\theta})$ почти всюду на единичной окружности, причем $\ln|f(e^{i\theta})|$ есть суммируемая функция. Далее мы имеем следующие характеристические свойства функций классов A, B, C:

---

* Функция $f(z)$ класса A характеризуется представимостью в виде отношения двух ограниченных аналитических функций; ср. с соответствующим свойством субгармонической функции класса A.

a) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы аналитическая функция $f(z)$ принадлежала классу A, будет:

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \text{конечному числу},$$

или, что то же,

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |\ln|f(re^{i\theta})||\, d\theta = \text{конечному числу}.$$

Входящие в эти условия пределы, вообще говоря, не совпадают с числами

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(e^{i\theta})|\, d\theta \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} |\ln|f(e^{i\theta})||\, d\theta,$$

будучи не меньше этих чисел.

b) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы аналитическая функция $f(z)$ принадлежала классу B, будет:

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(e^{i\theta})|\, d\theta,$$

где $f(e^{i\theta})$—предельные значения аналитической функции $f(z)$ на единичной окружности, причем $\ln|f(e^{i\theta})|$ есть суммируемая функция.

c) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы аналитическая функция $f(z)$ принадлежала классу C, будет:

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |\ln|f(re^{i\theta})||\, d\theta = \int_0^{2\pi} |\ln|f(e^{i\theta})||\, d\theta,$$

где $f(e^{i\theta})$ — предельные значения функции $f(z)$ на единичной окружности, причем $\ln|f(e^{i\theta})|$ есть суммируемая функция.

Наконец, из предыдущего мы получим аналитические представления функций $f(z)$ классов A, B, C, их характеризующие, если явно выразим потенциал Грина и в формуле для $\ln|f(z)|$ добавим сопряженную часть. Таким образом мы найдем для класса A:

$$f(z) = C_1\, b(z) \exp \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln p(\theta)\, \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta \times$$
$$\times \exp \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, dq(\theta), \tag{4}$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $\ln p(\theta)$ — действительная суммируемая функция, $q(\theta)$ — действительная функция с ограниченным изменением, производная которой равна нулю почти всюду *; C_1 — постоянное по модулю, равное единице. Очевидно, $p(\theta) = |f(e^{i\theta})|$ **. Далее, для класса B получим то же представление (4), где $q(\theta)$ — функция невозрастающая, с производной, равной нулю почти всюду ([3]). Наконец,

* Ср. ([3]).

** Здесь мы воспользовались тем, что если $|f(z)| \to p(\theta)$ почти всюду по некасательным путям, то и $f(z) \to f(e^{i\theta})$.

аналогично найдем аналитический аппарат для функций класса C, а именно:

$$f(z) = C_1 b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |p(\theta)| \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\theta,$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $\ln p(\theta)$ — действительная суммируемая функция. Очевидно, $p(\theta) = |f(e^{i\theta})|$.

§ 2

Будем обозначать через $u(P) = u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ логарифмически субгармоническую функцию внутри единичного шара пространства $p \geqslant 2$ измерений. Рассмотрим класс логарифмически субгармонических функций, определяемых следующим условием: $\int_e u^\delta(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega$ равномерно абсолютно непрерывная функция множества e для $r < 1$. В этом условии мы через $d\omega$ обозначаем элемент единичной сферы, через e любое измеримое множество точек единичной сферы, через $\delta > 0$ некоторое постоянное число. Определенный класс логарифмически субгармонических функций будем называть классом H_δ. Как известно(²), всякая субгармоническая функция $u(P)$ класса H_δ имеет радиальные предельные значения $u(Q)$ почти всюду на единичной сфере, причем $u^\delta(Q)$ образуют суммируемую функцию.

Докажем следующее предложение: *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы логарифмически субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала классу H_δ, будет:*

$$\lim_{r\to 1} \int u^\delta(P)\, d\omega = \int u^\delta(Q)\, d\omega, \tag{5}$$

где $u(Q)$ — радиальные предельные значения функции $u(P)$ на единичной шаровой поверхности, причем $u^\delta(Q)$ образуют суммируемую функцию.

Действительно, если функция $u(P)$ принадлежит классу H_δ, то, во-первых, $\int_e u^\delta(P)\, d\omega$ изображает равномерно абсолютно непрерывную функцию при $r < 1$ и, во-вторых, $\lim_{r\to 1} u^\delta(P) = u^\delta(Q)$ почти всюду на единичной шаровой поверхности, где $u^\delta(Q)$ — суммируемая функция. По известной теореме теории функций действительного переменного заключаем отсюда о справедливости соотношения (5).

Обратно, если выполнено условие (5), то функция $u(P)$ принадлежит классу H_δ. Действительно, согласно условию, $\lim_{r\to 1} u^\delta(P) = u^\delta(Q)$ и имеет место (5).

Так как функции $u^\delta(P) = u^\delta(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ неотрицательны, то, пользуясь теоремой Д. Ф. Егорова, легко показать, что при наших условиях автоматически будет выполнено соотношение

$$\int_e u^\delta(P)\, d\omega \to \int_e u^\delta(Q)\, d\omega.$$

После этого, принимая во внимание, что $\lim\limits_{r\to 1} u^\delta(P) = u^\delta(Q)$ почти всюду на единичной шаровой поверхности, заключаем, на основании общей теоремы теории функций действительного переменного: $\int\limits_e u^\delta(P)\,d\omega$ равномерно абсолютно непрерывная функция множества e для $r<1$, т. е. $u(P)$ принадлежит классу H_δ.

Ближайшая наша задача заключается в выяснении аналитического аппарата для представления логарифмически субгармонических функций класса H_δ. Пусть $u(P)$ функция класса H_δ, т. е. $\int\limits_e u^\delta(P)\,d\omega < \varepsilon$, если $\operatorname{mes} e < \eta = \eta(\varepsilon)$, каково бы ни было $r<1$; e любое измеримое множество точек единичной сферы меры $<\eta$. Положим $f(P) = u(P)$ на множестве точек e, $f(P) = 1$ на дополнении $C(e)$. Тогда будем иметь:

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int f^\delta(P)\,d\omega\right]^{\frac{1}{\delta}} < \left(1+\frac{\varepsilon\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

В пределе при $\delta\to 0$, принимая во внимание монотонное изменение левой части, получим:

$$\exp\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int \ln f(P)\,d\omega < \left(1+\frac{\varepsilon\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

или

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int \ln f(P)\,d\omega < \frac{1}{\delta}\ln\left(1+\frac{\varepsilon\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\right),$$

откуда

$$\int \ln f(P)\,d\omega < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \text{или} \quad \int\limits_e \ln u(P)\,d\omega < \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Последнее неравенство справедливо при любом множестве точек e, $\operatorname{mes} e < \eta$; значит, $\int\limits_e \ln^+ u(P)\,d\omega < \frac{\varepsilon}{\delta}$. Этим доказано, что субгармоническая функция $\ln u(P)$ принадлежит классу B. Как показано в § 1, мы будем иметь следующее аналитическое представление:

$$\begin{aligned}\ln u(P) = &-\int G(P;T)\,d\mu(T) + \\ &+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\ln u(Q)\,d\omega - \\ &-\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\psi_2(e),\end{aligned} \tag{6}$$

где $\psi_2(e) \geqslant 0$ с производной, равной нулю почти всюду на единичной поверхности, $\ln u(Q)$ и $u^\delta(Q)$ суммируемы. Потенцируя формулу (6), получим представление функции $u(P)$ класса H_δ:

$$u(P) = \exp - \int G(P;\ T)\ d\bar{\mu}(T) \exp \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(1-r^2)\ln u(Q)\,d\omega}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}} \times$$

$$\times \exp - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\psi_2(e), \qquad (7)$$

где $\ln u(Q)$ и $u^\delta(Q)$ суммируемы, $\psi_2(e) \geqslant 0$ и имеет производную, равную нулю почти всюду на единичной шаровой поверхности.

Докажем, что, обратно, из представления (7) вытекает принадлежность $u(P)$ классу H_δ. В самом деле, из (7) получаем *:

$$u^\delta(P) \leqslant \exp \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(1-r^2)\ln u^\delta(Q)}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega.$$

Заметив, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega = 1,$$

воспользуемся неравенством

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}} \ln u^\delta(Q)\,d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(1-r^2)\,u^\delta(Q)}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega\right].$$

Тогда найдем

$$u^\delta(P) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,u^\delta(Q)\,d\omega,$$

откуда $\int\limits_{e} u^\delta(P)\,d\omega$ равномерно абсолютно непрерывная функция для $r < 1$, т. е. $u(P)$ принадлежит классу H_δ.

Изучаемый здесь класс H_δ логарифмически субгармонических функций может быть охарактеризован другим внутренним свойством, эквивалентным определению. В самом деле, покажем, что необходимым

* Очевидно, $u(P)$ есть логарифмически субгармоническая функция, имеющая $u(Q)$ своими предельными значениями.

и достаточным условием для логарифмически субгармонической функции $u(P)$ класса H_δ будет

$$\int u^\delta(P)\,d\omega < K, \quad r < 1. \tag{8}$$

Очевидно, для логарифмически субгармонической функции определенного здесь класса H_δ справедливо неравенство (8). Докажем, что, обратно, если $u(P)$ удовлетворяет неравенству (8), то она принадлежит классу H_δ. Общий случай любого $\delta > 0$ немедленно приводится к случаю $\delta = 2$, если, положив $v(P) = u^{\frac{\delta}{2}}(P)$, заметим, что

$$\int u^\delta(P)\,d\omega = \int v^2(P)\,d\omega.$$

Тогда из неравенства (8) будет следовать $\int v^2(P)\,d\omega < K$, следовательно, если мы докажем, что $\int v^2(P)\,d\omega \to \int v^2(Q)\,d\omega$, то тем самым будет обнаружено, что $\int u^\delta(P)\,d\omega \to \int u^\delta(Q)\,d\omega$, чем гарантируется принадлежность $u(P)$ к классу H_δ.

Итак, пусть

$$\int u^2(P)\,d\omega < K. \tag{8'}$$

Докажем, что $\int u^2(P)\,d\omega \to \int u^2(Q)\,d\omega$, где $u(Q)$ — радиальные предельные значения функции $u(P)$ на единичной сфере, причем $u(Q)$ суммируема вместе с своим квадратом. Доказательство проведем отдельно для плоского случая $p = 2$ и для пространства $p = 3$. Очевидно, из неравенства (8′) вытекает, что $\int u(P)\,d\omega < K_1$, т. е. что $u(P)$ имеет наилучшую гармоническую мажоранту $h(P)$ в единичном шаре и, значит, $u(P) \leqslant h(P)$, причем $u(Q) = h(Q)$, где $u(Q)$ и $h(Q)$ — радиальные предельные значения на единичной сфере функций $u(P)$ и $h(P)$; $u(Q)$ суммируема вместе со своим квадратом *.

Если $p = 2$, то положим

$$h(Q) = h(e^{i\theta}) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

где a_n и b_n обозначают коэффициенты Фурье функции $h(e^{i\theta})$.

Отметим известное неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h^2(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{9}$$

С другой стороны, покажем, что

$$h(\rho e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\,\rho^n. \tag{10}$$

* Последнее вытекает из неравенства (8′) (²).

Действительно, так как $h(\rho e^{i\theta})$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(\rho e^{i\theta})$, то имеем

$$h(\rho e^{i\theta})=\lim_{R\to 1} h(\rho e^{i\theta};\ R),$$

где положено

$$h(\rho e^{i\theta};\ R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\alpha})\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\alpha-\theta)+\rho^2}\,d\alpha,\quad 0\leqslant\rho<R.$$

Переходя к пределу при $R\to 1$, получим:

$$h(\rho e^{i\theta})=\lim_{R\to 1} h(\rho e^{i\theta};\ R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\alpha})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\alpha-\theta)+\rho^2}\,d\alpha,$$

вследствие неравенства (8′). Заметив, что $u(e^{i\alpha})=h(e^{i\alpha})$ почти всюду для $0\leqslant\alpha<2\pi$, перепишем последнюю формулу в виде

$$h(\rho e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{i\alpha})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\alpha-\theta)+\rho^2}\,d\alpha,$$

откуда вытекает справедливость формулы (10). Из формулы (10), принимая во внимание неравенство (9), находим:

$$\int_0^{2\pi} h^2(\rho e^{i\theta})\,d\theta<\int_0^{2\pi} h^2(e^{i\theta})\,d\theta,$$

каково бы ни было $\rho<1$. Так как $u(\rho e^{i\theta})\leqslant h(\rho e^{i\theta})$, то

$$\int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta})\,d\theta\leqslant\int_0^{2\pi} h^2(\rho e^{i\theta})\,d\theta<\int_0^{2\pi} h^2(e^{i\theta})\,d\theta=\int_0^{2\pi} u^2(e^{i\theta})\,d\theta.$$

В пределе при $\rho\to 1$ отсюда получим

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta})\,d\theta\leqslant\int_0^{2\pi} u^2(e^{i\theta})\,d\theta.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta})\,d\theta\geqslant\int_0^{2\pi} u^2(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Сравнивая два последние неравенства, находим:

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} u^2(\rho e^{i\theta})\,d\theta=\int_0^{2\pi} u^2(e^{i\theta})\,d\theta,$$

что гарантирует принадлежность $u(\rho e^{i\theta})$ к классу H_2.

Перейдем теперь к доказательству того же утверждения для пространства. Положим

$$h(Q)=h(\theta,\phi)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Y_n(\theta,\phi),$$

где $Y_n(\theta, \psi) = \frac{1}{4\pi} \iint P_n(\cos\gamma)\, h(\theta', \psi')\, d\omega$, γ — угол между векторами $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OQ'}$, P_n — полином Лежандра степени n (4). Покажем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 \iint Y_n^2(\theta, \psi)\, d\omega \leqslant \iint h^2(\theta, \psi)\, d\omega. \qquad (11)$$

В самом деле,

$$\iint \left[h(\theta, \psi) - \sum_{n=0}^{N} (2n+1)\, Y_n(\theta, \psi) \right]^2 d\omega =$$

$$= \iint h^2(\theta, \psi)\, d\omega + \sum_{n=0}^{N} (2n+1)^2 \iint Y_n^2(\theta, \psi)\, d\omega -$$

$$- 2 \sum_{n=0}^{N} (2n+1) \iint h(\theta, \psi)\, Y_n(\theta, \psi)\, d\omega =$$

$$= \iint h^2(\theta, \psi)\, d\omega - \sum_{n=0}^{N} (2n+1)^2 \iint Y_n^2(\theta, \psi)\, d\omega,$$

так как

$$\iint h(\theta, \psi)\, Y_n(\theta, \psi)\, d\omega = (2n+1) \iint Y_n^2(\theta, \psi)\, d\omega.$$

После этого становится очевидным неравенство (11). С другой стороны, покажем, что

$$h(P) = h(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, Y_n(\theta, \psi)\, \rho^n. \qquad (12)$$

Действительно, так как $h(P)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$, то имеем

$$h(P) = \lim_{R \to 1} h(P; R),$$

где положено

$$h(P; R) = \frac{1}{4\pi} \iint u(R, \theta', \psi') \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 - 2R\rho\cos\gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\omega, \qquad 0 \leqslant \rho < R.$$

Переходя к пределу при $R \to 1$, получим

$$h(P) = \lim_{R \to 1} h(P; R) = \frac{1}{4\pi} \iint u(1, \theta', \psi') \frac{1 - \rho^2}{(1 - 2\rho\cos\gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\omega$$

вследствие неравенства (8′). Заметив, что $u(1, \theta', \psi') = h(1, \theta', \psi')$ почти всюду на единичной сфере, перепишем последнюю формулу в виде

$$h(P) = \frac{1}{4\pi} \iint h(1, \theta', \psi') \frac{1 - \rho^2}{(1 - 2\rho\cos\gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\omega,$$

откуда вытекает справедливость формулы (12), (4).

Из формулы (12), принимая во внимание неравенство (11), находим:

$$\iint h^2(P)\,d\omega < \iint h^2(Q)\,d\omega,$$

каково бы ни было $\rho < 1$. Так как $u(P) \leqslant h(P)$, то

$$\iint u^2(P)\,d\omega \leqslant \iint h^2(P)\,d\omega < \iint h^2(Q)\,d\omega = \iint u^2(Q)\,d\omega.$$

В пределе при $\rho \to 1$ отсюда получим

$$\lim_{\rho\to 1} \iint u^2(P)\,d\omega \leqslant \iint u^2(Q)\,d\omega.$$

С другой стороны, $\lim\limits_{\rho\to 1} \iint u^2(P)\,d\omega \geqslant \iint u^2(Q)\,d\omega.$

Сравнивая два последние неравенства, находим

$$\lim_{\rho\to 1} \iint u^2(P)\,d\omega = \iint u^2(Q)\,d\omega,$$

что гарантирует принадлежность $u(P)$ к классу H_2.

Полагая, в частности, $u(P) = |f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция внутри единичного круга, мы получаем известный класс H_δ аналитических функций, введенный Риссом: $\int\limits_0^\varphi |f(re^{i\theta})|^\delta\,d\theta$ равномерно абсолютно непрерывная функция аргумента φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, для $r < 1$. К этому классу аналитических функций приложима, в частности, изложенная теория логарифмически субгармонических функций класса H_δ. Так, всякая функция $f(z)$ класса H_δ имеет предельные значения по всем некасательным путям $f(e^{i\theta})$ почти всюду на единичной окружности, причем $|f(e^{i\theta})|^\delta$ и $\ln|f(e^{i\theta})|$ суммируемы.

Далее мы имеем следующее характеристическое свойство функций класса H_δ: условие, необходимое и достаточное для того, чтобы аналитическая функция $f(z)$ принадлежала классу H_δ, будет:

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^\delta\,d\theta,$$

где $f(e^{i\theta})$ — предельные значения аналитической функции $f(z)$ на единичной окружности, причем $|f(e^{i\theta})|^\delta$ суммируема. Из предыдущего мы получим аналитическое представление функций $f(z)$ класса H_δ, их характеризующее, если в формуле (6) явно выразим потенциал Грина и добавим сопряженную часть. Таким образом мы найдем:

$$f(z) = C_1 b(z) \exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln p(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta \times \exp \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,dq(\theta),$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $\ln p(\theta)$ и $[p(\theta)]^\delta$ суммируемы и $q(\theta)$ — невозрастающая ограниченная функция, производная которой равна нулю почти всюду*, $|C_1| = 1$. Очевидно $p(\theta) = |f(e^{i\theta})|$**.

---

* Ср. ([3]).

** Здесь мы воспользовались тем фактом, что если $|f(z)| \to p(\theta)$ почти всюду по некасательным путям, то и $f(z) \to f(e^{i\theta})$.

Наконец, класс H_δ характеризуется условием $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta < K$, $r < 1$. Аналитические функции класса H_1 обладают рядом специфических свойств как в отношении их внутренней структуры, так и в отношении их аналитического представления. Выяснению этих свойств посвящается следующий параграф настоящей работы.

§ 3

Согласно терминологии Рисса, голоморфная функция $f(z)$, удовлетворяющая неравенству $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta < K$, $r < 1$, называется функцией класса H_1.

В предыдущем функции класса H_1 были охарактеризованы как при помощи внутреннего их свойства: $\int_0^{\varphi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta$ для $r < 1$ есть равномерно абсолютно непрерывная функция, так и посредством свойства смешанного характера:

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

В дальнейшем, выяснив простейшие аналитические представления функций класса H_1, мы присоединим к вышеупомянутым свойствам новое характеристическое их свойство чисто граничного характера:

$$\int_C f(x)\, x^n\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где C — единичная окружность *.

Условимся называть интегралом типа Коши-Стильтьеса выражение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x\, d\psi(\theta)}{x - z}, \tag{13}$$

где $x = e^{i\theta}$, $z \neq x$, а $\psi(\theta) = \psi_1(\theta) + i\psi_2(\theta)$, причем ψ_1 и ψ_2 — любые функции с ограниченными изменениями на сегменте $[0, 2\pi]$. В частности, если $\psi(\theta)$ есть абсолютно непрерывная функция, выражение (13) обращается в интеграл типа Коши для граничной функции $\psi'(\theta)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x\psi'(\theta)\, d\theta}{x - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi'(\theta)\, dx}{x - z}. \tag{14}$$

Как известно, выражение (14) называют интегралом Коши, если его предельные значения изнутри окружности C по всем некасательным путям совпадают с граничной функцией $\psi'(\theta)$ почти всюду на окруж-

* Это свойство непосредственно вытекает из моей диссертации (5) и работы Рисса (6).

ности. Таким образом, естественно назвать выражение (13) интегралом Коши-Стильтьеса, если его предельные значения изнутри окружности C по всем некасательным путям совпадают с производной $\psi'(\theta)$ почти всюду на окружности.

ТЕОРЕМА 1. *Условия* $\int_0^{2\pi} x^n d\psi(\theta) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ *необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл типа Коши-Стильтьеса* (13) *обращался в интеграл Коши-Стильтьеса.*

Обозначая через z^* точку, симметричную с точкой $z = re^{i\varphi}$ относительно единичной окружности, отметим легко получаемое соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{xd\psi(\theta)}{x-z} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{xd\psi(\theta)}{x-z^*} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\,d\psi(\theta)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2},$$

откуда, при стремлении точки z по любому некасательному пути к почти всякой точке $e^{i\theta_0}$ окружности, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z^*} \to \psi'(\theta_0). \tag{15}$$

Из предельного соотношения (15), пользуясь теоремой единственности аналитических функций, немедленно заключаем:

условие

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z^*} \equiv 0 \tag{16}$$

есть необходимое и достаточное для того, чтобы интеграл типа Коши-Стильтьеса обращался в интеграл Коши-Стильтьеса.

Остается лишь обнаружить, что тождество (16) равносильно с условиями

$$\int_0^{2\pi} x^n\,d\psi(\theta) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{xd\psi(\theta)}{x-z^*} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi z^{*n}} \int_0^{2\pi} x^n\,d\psi(\theta),$$

откуда и следует наше утверждение.

Замечание. Считая, в частности, $\psi(\theta)$ за абсолютно непрерывную функцию, мы получаем известные [5] условия $\int_C x^n f(x)\,dx = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ для того, чтобы интеграл типа Коши обращался в интеграл Коши.

ТЕОРЕМА 2. *Условия* $\int_0^{2\pi} x^n\,d\psi(\theta) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *необходимы и достаточны для того, чтобы соответствующий интеграл Пуассона-*

Стильтьеса изображал голоморфную функцию внутри единичного круга.

Действительно, наши условия $\int_0^{2\pi} x^n \, d\psi(\theta) = 0 \;\; (n = 1, 2, \ldots)$ в развернутом виде будут:

$$a_n = b'_n, \quad b_n = -a'_n,$$

где положено

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \, d\psi_1(\theta), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\theta \, d\psi_1(\theta),$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \, d\psi_2(\theta), \quad b'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\theta \, d\psi_2(\theta).$$

Иначе эти условия можно записать в виде

$$P' = Q, \quad Q' = -P,$$

где P и P' суть интегралы Пуассона-Стильтьеса соответственно для функций ψ_1 и ψ_2, а Q и Q' — им сопряженные гармонические функции.

Таким образом интеграл Пуассона-Стильтьеса для $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ обозначен через $P + iP'$. При наших условиях он представляет голоморфную функцию $P + iQ$, и, обратно, если интеграл Пуассона-Стильтьеса $P + iP'$ изображает голоморфную функцию, то наши условия выполнены.

Замечание. Считая, в частности, $\psi(\theta)$ за абсолютно непрерывную функцию, мы получаем известные условия $\int_C x^n f(x)\, dx = 0 \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots)$ как необходимые и достаточные для того, чтобы соответствующий интеграл Пуассона изображал голоморфную функцию внутри единичного круга.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\int_0^{2\pi} x^n \, d\psi(\theta) = 0 \;\; (n = 1, 2, \ldots)$, *то* $\psi(\theta)$ *функция абсолютно непрерывная.*

Будем сначала предполагать, что $\int_0^{2\pi} d\psi = 0$. Тогда интегрированием по частям находим:

$$0 = \int_0^{2\pi} x^n \, d\psi(\theta) = -n \int_C \psi(\theta)\, x^{n-1} dx \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$\int_C \psi(\theta)\, x^n \, dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, по предыдущей теореме, интегралы Пуассона, образованные для функций ψ_1 и ψ_2 с ограниченными изменениями, будут

сопряжены. По известной теореме отсюда заключаем, что ψ_1 и ψ_2 абсолютно непрерывны.

Пусть теперь

$$\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi a \neq 0.$$

Образуем вспомогательную функцию

$$\Psi(\theta) = \psi(\theta) - a\theta;$$

очевидно,

$$\int_0^{2\pi} x^n d\Psi(\theta) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

По доказанному, Ψ есть абсолютно непрерывная, а значит, и ψ — функция абсолютно непрерывная.

Из трех доказанных выше теорем, пользуясь теоремой единственности, получаем: если голоморфная функция $f(z)$ внутри единичного круга представима при помощи одной из четырех формул:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)\,dx}{x - z} \quad \text{(интеграл Коши);}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{(1 - r^2)\,d\theta}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad \text{(интеграл Пуассона);}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r)\,d\psi(\theta)}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad \text{(интеграл Пуассона-Стильтьеса);}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} \frac{x\,d\psi(\theta)}{x - z} \quad \text{(интеграл Коши-Стильтьеса),}$$

то эта функция представима посредством трех остальных формул.

Короче говоря, четыре упомянутых формулы равносильны. Условие, необходимое и достаточное для представимости гармонической функции $u(r, \varphi)$ посредством интеграла Пуассона-Стильтьеса, как известно, будет:

$$\int_0^{2\pi} |u(r, \varphi)|\,d\varphi < K, \quad r < 1.$$

Очевидно отсюда, что условие

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\varphi < K, \quad r < 1,$$

есть необходимое и достаточное для представимости голоморфной функции с помощью интеграла Пуассона-Стильтьеса.

Пользуясь упомянутой выше равносильностью формул Пуассона-Стильтьеса и Коши, мы находим известный результат Рисса и Фихтенгольца: условие $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi < K$, $r < 1$, есть необходимое и доста-

точное для представимости голоморфной функции $f(z)$ помощью интеграла Коши.

Из изложенной теории функций класса H_1 легко вытекает известная теорема: *для того чтобы функция принадлежала классу* H_1, *необходимо и достаточно, чтобы ее примитивная была непрерывной в замкнутом круге* $|z| \leqslant 1$ *и абсолютно непрерывной на окружности* $|z| = 1$.

В самом деле, пусть $F(z)$ есть непрерывная в круге $|z| \leqslant 1$, причем $F(e^{i\theta})$ абсолютно непрерывная. Покажем, что $F'(z)$ принадлежит классу H_1:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{F(x)\,dx}{(x-z)^2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z},$$

где

$$\psi(\theta) = \int\limits_0^\theta F'(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Проверим, что $F'(z)$ представлена интегралом Коши-Стильтьеса, что и будет обозначать принадлежность $F'(z)$ классу H_1. С этой целью образуем

$$\int\limits_0^{2\pi} x^n\,d\psi(\theta) = -i \int\limits_C x^{n-1} F'(x)\,dx = i(n-1) \int\limits_C F(x)\,x^{n-2}\,dx = 0,$$

где $n = 1, 2, \ldots$, что и нужно.

Обратно, пусть $F'(z)$ есть класса H_1; тогда $F'(z) - F'(0)$ тоже класса H_1, т. е. представима интегралом Коши от производной абсолютно непрерывной функции $\psi(\theta)$:

$$F'(z) - F'(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z} = \frac{z}{2\pi} \int\limits_C \frac{\psi(\theta)\,dx}{(x-z)^2},$$

или

$$\frac{F'(z) - F'(0)}{zi} = \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\psi(\theta)\,dx}{x-z}\right]',$$

откуда

$$F'(z) = iz\,\varphi'(z) + F'(0),$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\psi(\theta)\,dx}{x-z}$ есть непрерывная в круге $|z| \leqslant 1$ и абсолютно непрерывная на окружности $|z| = 1$ как представимая интегралом Коши *, а следовательно, интегралом Пуассона от абсолютно непрерывной функции $\psi(\theta)$.

---

* Это утверждение проверяется путем вычисления

$$\int\limits_C x^n \psi(\theta)\,dx = \frac{i}{n+1} \int\limits_C x^n \psi'(\theta)\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом $F(z)=iz\varphi(z)-i\int\limits_0^z\varphi(z)\,dz+F'(0)z$, откуда следует, что $F(z)$ непрерывна при $|z|\leqslant 1$ и абсолютно непрерывна на окружности $|z|=1$.

§ 4

Задачей настоящего параграфа мы ставим исследование предельных значений интеграла типа Коши-Стильтьеса. Полагая

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z}, \tag{17}$$

где $\psi(\theta)=\psi_1(\theta)+i\psi_2(\theta)$ есть любая функция с ограниченным изменением на $[0,2\pi]$, мы докажем, что почти всюду на окружности C существует конечный предел функции $F(z)$, когда точка z приближается к точке окружности, следуя любому некасательному пути. Эти предельные значения функции $F(z)$ изнутри окружности C и извне C представляются посредством значений интеграла типа Коши-Стильтьеса на окружности, выраженных при помощи особого интеграла.

Чтобы определить значение функции (17) в точке $x_0=e^{i\theta_0}$ окружности C, выкинем из C дугу $(\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon)$ и оставшуюся часть окружности обозначим C_ε. Тогда, по определению,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-x_0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\varepsilon}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-x_0},$$

если последний предел существует.

Наша задача — установить формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z}\to\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-x_0}\pm\frac{1}{2}\psi'(\theta_0), \tag{18}$$

которая имеет место почти всюду на C при стремлении точки z по любому некасательному пути к точке x_0 окружности (знак плюс для случая, когда z внутри C, минус — когда z вне C). Интеграл правой части определен как особый *

Покажем сначала существование конечных предельных значений интеграла типа Коши-Стильтьеса (17). С этой целью представим $F(z)$ в виде:

$$F_i(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi(\theta)}{1-\frac{z}{x}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi(\theta)}{x^n};$$

* Для случая, когда $\psi(\theta)$ абсолютно непрерывная функция, формула (18) была установлена мною в диссертации ([5]).

полагая $z=re^{i\varphi}$, $x=e^{i\theta}$, $\psi(\theta)=\psi_1(\theta)+i\psi_2(\theta)$, находим:

$$F(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)+$$
$$+\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi)+$$
$$+\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a'_n\cos n\varphi+b'_n\sin n\varphi)-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n(-b'_n\cos n\varphi+a'_n\sin n\varphi), \quad (19)$$

где положено

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\, d\psi_1(\theta), \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\theta\, d\psi_1(\theta),$$
$$a'_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\, d\psi_2(\theta), \qquad b'_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\theta\, d\psi_2(\theta).$$

Будем предполагать, что $\int_0^{2\pi} d\psi(\theta)=0$ (в конце мы освободимся от этого ограничения). Обозначая через $P(r,\varphi)$ и $P'(r,\varphi)$ интегралы Пуассона-Стильтьеса для функций ψ_1 и ψ_2, а через $Q(r,\varphi)$ и $Q'(r,\varphi)$ им сопряженные гармонические функции, перепишем формулу (19) в виде:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z}=\frac{1}{2}[P(r,\varphi)+iQ(r,\varphi)]+$$
$$+\frac{i}{2}[P'(r,\varphi)+iQ'(r,\varphi)]. \quad (20)$$

Так как гармонические функции P и P', будучи интегралами Пуассона-Стильтьеса, имеют почти всюду на окружности конечные предельные значения по всем некасательным путям, то тем же свойством обладают им сопряженные функции Q и Q' ([5]). Следовательно, из формулы (20) заключаем, что $F(z)$ имеет почти всюду на окружности C конечные предельные значения, когда точка z стремится к точке $e^{i\theta_0}$ окружности, следуя по любому некасательному пути.

Чтобы найти эти предельные значения, будем точку $z=re^{i\theta_0}$ приближать к точке $e^{i\theta_0}$ окружности C по радиусу. Так как $\lim\limits_{r\to1}P(r,\theta_0)=\psi'_1(\theta_0)$, $\lim\limits_{r\to1}P'(r,\theta_0)=\psi'_2(\theta_0)$, то из формулы (20) заключаем:

$$\lim_{r\to1}F(z)=\frac{1}{2}\psi'(\theta_0)+\frac{1}{2}\lim_{r\to1}Q(r,\theta_0)-\frac{1}{2}\lim_{r\to1}Q'(r,\theta_0), \quad (21)$$

где положено

$$Q(r,\theta_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\sin(\theta_0-\theta)}{1-2r\cos(\theta_0-\theta)+r^2}\,d\psi_1(\theta), \quad (22)$$

$$Q'(r, \theta_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\sin(\theta_0 - \theta)}{1 - 2r\cos(\theta_0 - \theta) + r^2}\, d\psi_2(\theta). \tag{23}$$

Интегрированием по частям получим:

$$Q(r, \theta_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin(\theta - \theta_0)}{1 - 2r\cos(\theta - \theta_0) + r^2}\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1(\theta_0 + t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\psi_1(\theta_0 + t) - \psi_1(\theta_0)]\,\frac{d}{dt}\left(\frac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}\right) dt,$$

или

$$Q(r, \theta_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\psi_1(\theta_0 + t) + \psi_1(\theta_0 - t) - 2\psi_1(\theta_0)]\,\frac{d}{dt}\left(\frac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}\right) dt.$$

Воспользуемся теперь теоремой, доказанной Плеснером (7). Для всех θ_0, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_0^t [f(\theta_0 + t) + f(\theta_0 - t) - 2f(\theta_0)]\, dt = 0,$$

имеет место соотношение

$$\lim_{r\to 1}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[f(\theta_0 + t) + f(\theta_0 - t) - 2f(\theta_0)\Big]\frac{d}{dt}\left(\frac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^{\pi}\frac{f(\theta_0 + t) + f(\theta_0 - t) - 2f(\theta_0)}{\sin^2\frac{1}{2}t}\, dt\right] = 0,$$

где $\varepsilon = \arcsin(1 - r)$.

Полагая здесь $f = \psi_1$, мы видим, что условие этого предложения выполняется во всякой точке θ_0, в которой ψ_1 имеет конечную производную, т. е. почти всюду. Следовательно, имеем:

$$\lim_{r\to 1}\left[Q(r, \theta_0) + \frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^{\pi}\frac{\psi_1(\theta_0 + t) + \psi_1(\theta_0 - t) - 2\psi_1(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\, dt\right] = 0,$$

где $\varepsilon = \arcsin(1 - r)$ почти для всех значений θ_0.

Так как выше было доказано, что $\lim\limits_{r\to 1} Q(r, \theta_0)$ существует почти для всех значений θ_0, то из последней формулы имеем

$$\lim_{r\to 1} Q(r, \theta_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi_1(\theta_0 + t) + \psi_1(\theta_0 - t) - 2\psi_1(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\, dt \tag{24}$$

почти для всех значений θ_0. Интеграл правой части определен как особый.

Аналогично, получим

$$\lim_{r\to 1} Q'(r, \theta_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_2(\theta_0+t)+\psi_2(\theta_0-t)-2\psi_2(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \tag{25}$$

почти для всех значений θ_0. Интеграл правой части определен как особый.

Возвращаясь к формуле (21) и внося в нее (24) и (25), получим:

$$\lim_{r\to 1} F(z) = \frac{1}{2}\psi'(\theta_0) - \frac{i}{8\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(\theta_0+t)+\psi(\theta_0-t)-2\psi(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt, \tag{26}$$

где интеграл правой части определен как особый.

Формула (26) имеет место почти для всех значений θ_0.

Остается лишь преобразовать интеграл правой части формулы (26) к виду $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-x_0}$, чтобы обнаружить справедливость формулы (18).

Итак, покажем, что

$$-\frac{i}{8\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(\theta_0+t)+\psi(\theta_0-t)-2\psi(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(t)}{x-x_0}, \tag{27}$$

где $x = e^{it}$, $x_0 = e^{i\theta_0}$.

Очевидно, имеем:

$$-\frac{i}{8\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(\theta_0+t)+\psi(\theta_0-t)-2\psi(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= -\frac{i}{8\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\psi(\theta_0+t)+\psi(\theta_0-t)-2\psi(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= -\frac{i}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,d[\psi(\theta_0+t)+\psi(\theta_0-t)].$$

Мы воспользовались тем, что в рассматриваемых точках θ_0 функция ψ имеет конечную производную. Последнее соотношение может быть записано в виде

$$-\frac{i}{8\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(\theta_0+t)+\psi(\theta_0-t)-2\psi(\theta_0)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,d\psi(\theta_0+t). \tag{28}$$

С другой стороны, находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(t)}{x-x_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi(t)}{1-\cos(t-\theta_0)+i\sin(t-\theta_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(t-\theta_0)-i\sin(t-\theta_0)}{2-2\cos(t-\theta_0)}\,d\psi(t),$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(t)}{x-x_0}=-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(t-\theta_0)}{1-\cos(t-\theta_0)}\,d\psi(t),$$

так как $\int_0^{2\pi} d\psi(t)=0$.

Последняя формула может быть записана в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(t)}{x-x_0}=\frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{1-\cos t}\,d\psi(\theta_0+t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,d\psi(\theta_0+t). \tag{29}$$

Сравнивая (28) и (29), убеждаемся в справедливости (27). Итак, формула (18) установлена для случая, когда точка z остается внутри окружности C. Применяя соотношение (15) из § 3, убеждаемся в справедливости формулы (18) и в случае внешней точки z. Наконец, от ограничения $\int_0^{2\pi} d\psi(\theta)=0$ освободимся, если положим $\Psi(\theta)=\psi(\theta)-a\theta$, где $\int_0^{2\pi} d\psi(\theta)=2\pi a$. Тогда по доказанному будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-z}\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\Psi(\theta)}{x-x_0}\pm\frac{1}{2}\Psi'(\theta_0), \tag{30}$$

когда $z\to x_0=e^{i\theta_0}$ по любому некасательному пути почти для всех точек x_0. С другой стороны, очевидно, имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{xa\,d\theta}{x-z}\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{xa\,d\theta}{x-x_0}\pm\frac{a}{2}. \tag{31}$$

Складывая (30) и (31), найдем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-z}\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,d\psi(\theta)}{x-x_0}\pm\frac{1}{2}\psi'(\theta_0),$$

что и требовалось доказать.

Известно, что каждая для $|z|<1$ мероморфная функция $f(z)$ ограниченного вида может быть представлена в виде

$$f(z)=C_1\frac{b_1(z)}{b_2(z)}e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\psi(\theta)},$$

где $\psi(\theta)$—действительная функция с ограниченным изменением, $b_1(z)$, $b_2(z)$ — произведения Бляшке, C_1 — постоянное модуля 1.

Применяя установленный выше результат, мы убедимся, что когда точка z стремится по любому некасательному пути к точке $e^{i\theta_0}$ окруж-

ности, то почти для всех значений θ_0 существует конечный предел функции $f(z)$. Эти предельные значения функции $f(z)$ выражаются формулой

$$f(z) \to C_1 \frac{b_1(e^{i\theta_0})}{b_2(e^{i\theta_0})} e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta_0}}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}} d\psi(\theta)+\psi'(\theta_0)}$$

где $b_1(e^{i\theta_0})$, $b_2(e^{i\theta_0})$ — предельные значения произведений Бляшке в точке $e^{i\theta_0}$, интеграл определен как особый.

Математический институт при Моск. гос. университете.

Поступило 21. I. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1 Привалов И. И., Субгармонические функции, 1937, стр. 100.
2 Привалов И. И., Граничные задачи теории субгармонических и гармонических функций в пространстве, Матем. сб., **3 (45)**: 1, 1938; ДАН, **18**, 1, 1938.
3 Смирнов В. И., Sur les formules de Cauchy et de Green, Изв. Академии Наук СССР, 1932, стр. 341.
4 Гурса, Курс анализа, т. III, стр. 262, 1936.
5 Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Изв. Сарат. ун-та, 1918.
6 M. Riesz, Math. Zeitschr., **18**, 1923.
7 A. Plesner, Zur Theorie der konjugierten trigonom. Reihen, Giessen, 1923.

I. I. PRIVALOFF. SUR CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS SUBHARMONIQUES ET LEUR REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

RÉSUMÉ

§ 1

Soit $u(P) = u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ une fonction subharmonique à l'intérieur de la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine et située dans un espace à $p \geqslant 2$ dimensions. On considère trois classes de fonctions subharmoniques définies par les conditions suivantes:

(A) $\int u^+(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega < K,\ r < 1;$

(B) $\int_e u^+(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega$ est une fonction uniformément absolument continue de l'ensemble e pour $r < 1$;

(C) $\int_e |u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})|\, d\omega$ est une fonction uniformément absolument continue de l'ensemble e au voisinage de $r = 1$.

Dans ces conditions (A), (B) et (C) nous désignons par $d\omega$ l'élément de la sphère unitaire et par e un ensemble mesurable quelconque de points de la sphère. J'ai démontré dans un article précédent (1) que chaque fonction subharmonique $u(P)$ de classe A [donc, a fortiori, chaque fonction de classe B ou C] possède des valeurs limites $u(Q)$ presque partout sur la sphère unitaire quand on s'approche de cette sphère en suivant ces rayons, et que ces valeurs limites forment une fonction sommable.

Dans le présent article on démontre les propositions suivantes:

I. *Pour qu'une fonction* $u(P)$ *appartienne aux classes* A, B *et* C *on a respectivement les critères nécessaires et suffisants*:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \lim\limits_{r\to 1}\int u^{+}(P)\,d\omega = \text{à un nombre fini} \\ \text{ou, ce qui est le même,} \\ \quad \lim\limits_{r\to 1}\int |u(P)|\,d\omega = \text{à un nombre fini.} \end{array}\right\} \quad (A)$$

Les limites qui figurent dans ces conditions ne coïncident pas, dans le cas général, avec les nombres $\int u^{+}(Q)\,d\omega$ *et* $\int |u(Q)|\,d\omega$, *elles sont au moins égales à ces nombres*;

$$\text{b) } \lim_{r\to 1}\int u^{+}(P)\,d\omega = \int u^{+}(Q)\,d\omega. \qquad (B)$$

$$\text{c) } \lim_{r\to 1}\int |u(P)|\,d\omega = \int |u(Q)|\,d\omega. \qquad (C)$$

II. THÉORÈME FONDAMENTAL. *Pour qu'une fonction subharmonique* $u(P)$ *appartienne à l'une des classes* A, B, C *il est nécessaire et suffisant que sa meilleure majorante harmonique appartienne à la même classe.*

En vertu de ce théorème le problème de la représentation analytique des fonctions subharmoniques de classes A, B et C se réduit à l'étude des représentations analytiques des fonctions harmoniques appartenant aux classes A, B, C.

J'ai démontré antérieurement (¹) qu'une fonction harmonique de classe A est caractérisée par sa représentation analytique au moyen de l'intégrale de Poisson-Stieltjes la plus générale; une fonction harmonique de la classe C est caractérisée par sa représentation analytique au moyen de l'intégrale de Poisson.

Enfin dans le présent article j'ai démontré qu'une fonction harmonique de la classe B est caractérisée par sa représentation analytique au moyen d'une intégrale de Poisson-Stieltjes de forme particulière, à savoir celle où l'on a sous le signe de la différentielle la différence d'une fonction absolument continue d'ensemble et d'une fonction non négative d'ensemble ayant une dérivée nulle presque partout sur la sphère unitaire.

En posant en particulier $u(P) = \ln|f(z)|$ où $f(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur du cercle unitaire, on obtient des classes connues A, B, C de fonctions analytiques.

§ 2

Désignons par $u(P) = u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ une fonction logarithmiquement subharmonique à l'intérieur de la sphère unitaire dans un espace à $p \geqslant 2$ dimensions. Désignons par H_δ la classe des fonctions logarithmiquement subharmoniques définies par la condition suivante:

$\int_e u^{\delta}(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\,d\omega$ est une fonction uniformément absolument continue de l'ensemble e pour $r < 1$.

Dans cette condition nous désignons par $d\omega$ l'élément de la sphère unitaire, par e un ensemble mesurable quelconque de points de la sphère unitaire et par $\delta > 0$ une certaine constante.

En vertu d'un théorème précédent [1] chaque fonction subharmonique $u(P)$ de classe H_δ possède des valeurs limites $u(Q)$ presque partout sur la sphère unitaire quand on s'approche de la sphère en suivant les rayons, et d'ailleurs les valeurs $u^\delta(Q)$ forment une fonction sommable.

Nous déduisons ici un critère nécessaire et suffisant pour qu'une fonction $u(P)$ appartienne à la classe H_δ

$$\lim_{r \to 1} \int u^\delta(P)\, d\omega = \int u^\delta(Q)\, d\omega.$$

On déduit ensuite une représentation analytique des fonctions de la classe H_δ qui les caractérise:

$$u(P) = \exp - \int G(P;T)\, d\mu(T) \cdot \exp \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(1-r^2) \ln u(Q)\, d\omega}{(1+r^2-2r\cos\gamma)^{\frac{p}{2}}} \times$$
$$\times \exp - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1+r^2-2r\cos\gamma)^{\frac{p}{2}}}\, d\psi_2(e)$$

où $\ln u(Q)$ et $u^\delta(Q)$ sont des fonctions sommables; $\psi_2(e) \geqslant 0$ et posséda une dérivée nulle presque partout sur la sphère unitaire; $G(P;T)$ est le fonction de Green pour la sphère unitaire, $\mu(T)$ — la répartition des masses provenant de la fonction $\ln u(P)$.

On démontre enfin un autre critère nécessaire et suffisant pour qu'une fonction $u(P)$ appartienne à la classe H_δ

$$\int u^\delta(P)\, d\omega < K, \quad r < 1.$$

En supposant, en particulier, $u(P) = |f(z)|$ où $f(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur du cercle unitaire, on obtient la classe H_δ bien connue des fonctions analytiques introduites par Riesz.

§ 3

Convenons d'appeler intégrale du type Cauchy-Stieltjes l'expression

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x\, d\psi(\theta)}{x-z} \tag{1}$$

où $x = e^{i\theta}$, $z \neq x$ et $\psi(\theta) = \psi_1(\theta) + i\psi_2(\theta)$, $\psi_1(\theta)$ et $\psi_2(\theta)$ étant deux fonctions quelconques à variation bornée sur le segment $[0, 2\pi]$.

L'expression (1) sera nommée intégrale de Cauchy-Stieltjes, si ces valeurs limites obtenues en passant de l'intérieur du cercle C, $|x| = 1$, vers la circonférence suivant un chemin quelconque non tangent à la

circonférence coïncident avec la dérivée $\psi'(\theta)$ presque partout sur la circonférence.

THÉORÈME 1. *Les conditions* $\int_0^{2\pi} x^n \, d\psi(\theta) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$ *sont nécessaires et suffisantes pour qu'une intégrale du type de Cauchy-Stieltjes* (1) *devienne une intégrale de Cauchy-Stieltjes.*

THÉORÈME 2. *Les conditions* $\int_0^{2\pi} x^n \, d\psi(\theta) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$ *sont nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale correspondante de Poisson-Stieltjes représente une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle unitaire.*

THÉORÈME 3. *Si* $\int_0^{2\pi} x^n \, d\psi(\theta) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots)$, *la fonction* $\psi(\theta)$ *est absolument continue.*

On déduit de ces théorèmes que si une fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du cercle unitaire est représentable au moyen de l'une des quatre formules:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x)\, dx}{x - z} \qquad \text{(intégrale de Cauchy);}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 + 2r\cos(\theta - \varphi)} \, d\theta \qquad \text{(intégrale de Poisson);}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} \, d\psi(\theta) \qquad \text{(intégrale de Poisson-Stieltjes);}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x \, d\psi(\theta)}{x - z} \qquad \text{(intégrale de Cauchy-Stieltjes),}$$

cette fonction est représentable au moyen des trois autres formules.

En particulier, les fonctions analytiques de classe H_1 sont caractérisées par leur possibilité d'être représentées au moyen de l'intégrale de Cauchy ou, ce qui est le même, par les conditions limites (²)

$$\int_C f(x)\, x^n \, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

§ 4

En conclusion nous établissont la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x \, d\psi(\theta)}{x - z} \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x \, d\psi(\theta)}{x - x_0} \pm \frac{1}{2} \psi'(\theta_0)$$

qui a lieu presque partout sur la circonférence C, $|x| = 1$ quand le point z tend vers le point $x_0 = e^{i\theta_0}$ de la circonférence C en suivant un chemin quelconque non tangent à la circonférence (le signe $+$ correspond au cas où z est à l'intérieur, le signe $-$ quand il est à l'extérieur de C). L'intégrale du second membre est définie comme une intégrale singulière.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Л. В. КЕЛДЫШ

СТРУКТУРА МИНИМАЛЬНЫХ РЕШЕТ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ МНОЖЕСТВА ИЗМЕРИМЫЕ *B*

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе исследуются минимальные решета, определяющие множества измеримые B, и определяются действительные индексы этих решет.

Мы рассматриваем упорядоченные (см. (2), стр. 266) прямоугольные решета C, определяющие линейные множества измеримые B и такие, что для каждой точки x, входящей в множество E, определенное решетом C, существует только единственная цепь прямоугольников решета C

$$\triangle_{n_1} \supset \triangle_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \triangle_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \cdots,$$

определяющая точку x. Мы предполагаем, что, каково бы ни было ε, в решете C существует только конечное число прямоугольников с диаметром $> \varepsilon$.

Мы назовем точку x пространства Бэра J_x внешней точкой если она не входит в E, и внутренней точкой, если она входит в E. Тогда: индексом решета C во внешней точке x, $\mathrm{Ind}_x C$ называется индекс в этой точке линейного решета, которое образуют верхние стороны прямоугольников решета C.

Индексом $\mathrm{Ind}C$ решета C называется наименьшее трансфинитное число, превосходящее индексы решета C во всех внешних точках.

В настоящей работе мы изучаем строение минимальных * решет, определяющих множества измеримые B, и в частности определяем индекс множества E измеримого B, или, другими словами, — индекс минимального решета, определяющего множество E измеримое B в зависимости от класса и вида этого множества.

Пусть задано решето C, определяющее множество E. Построим из его прямоугольников новое упорядоченное решето C' следующим образом: при построении решета C' каждый прямоугольник решета C'

---

* Решето C называется минимальным, если $\mathrm{Ind}C$ — минимальный индекс всевозможных решет, определяющих множество E. Н. Н. Лузин вводит понятие «кажущихся индексов» и определяет их. Мы изучаем только действительные индексы.

может сжиматься в вертикальных размерах, проекция же его в J_x остается неизменной. Кроме того, он может быть выдвинут из некоторых прямоугольников решета C, его содержащих, но может содержаться только в тех прямоугольниках, которым он подчинен в решете C, так что ранг прямоугольника $\triangle$ в решете C' не больше, чем его ранг в решете C. Решето C' мы назовем **подчиненным** решету C.

ЛЕММА I. *Всякое упорядоченное решето C', подчиненное решету C, определяет множество E', содержащееся в множестве E, определенном решетом C, причем во всякой точке x, внешней для E, имеем* $\mathrm{Ind}_x C' \leqslant \mathrm{Ind}_x C$, *если* $\mathrm{Ind}_x C = \omega^\alpha$, *и* $\mathrm{Ind}_x C' \leqslant (\mathrm{Ind}_x C)\cdot m$, *если* $\mathrm{Ind}_x C = \omega^\alpha n + \beta$, $\beta < \omega^\alpha$, *n и m—целые числа.*

Пусть x точка множества E'. Тогда существует цепь прямоугольников решета C', определяющая эту точку: $\triangle'_{n_1} \supset \triangle'_{n_1 n_2} \supset \ldots \supset \triangle'_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \ldots$; но прямоугольник $\triangle'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ имеет в решете C ранг $\geqslant k$ и по условию должен и для C находиться внутри прямоугольника $\triangle'_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$. Следовательно, наша цепь составляет часть какой-то цепи решета C и, следовательно, $x \subset E$ и $E' \subset E$.

Оценим теперь $\mathrm{Ind}_x C'$, где x — точка, **внешняя для множества** E. Заметим, что если $\mathrm{Ind}_x C = n$, n — конечное число, то $\mathrm{Ind}_x C' \leqslant n$ также конечен. Предположим, что сформулированное нами предложение верно для всякого трансфинита $\gamma < \omega^\alpha$, и покажем, что тогда оно верно также для ω^α и $\omega^\alpha n + \beta$, $\beta < \omega^\alpha$. Пусть $\mathrm{Ind}_x C = \omega^\alpha$; тогда, если $C_\triangle$ часть решета C, заключенная внутри любого его прямоугольника $\triangle$, то $\mathrm{Ind}_x C_\triangle < \omega^\alpha$. Прямоугольники 1-го ранга решета C' расположены в последовательности $\triangle'_1, \triangle'_2, \ldots, \triangle'_n, \ldots$ так, что каждый последующий лежит выше предыдущего. Часть решета C', заключенная внутри прямоугольника $\triangle'_n$, — $C'_{\triangle'_n}$ по построению подчиненного решета должна быть подчинена решету $C_{\triangle'_n}$, и так как $\mathrm{Ind}_x C_{\triangle'_n} < \omega^\alpha$, т. е. $\mathrm{Ind}_x C_{\triangle'_n} = \omega^{\alpha'} l + \beta$, где $\alpha' < \alpha$, $\beta < \omega^{\alpha'}$ и l — целое число, то $\mathrm{Ind}_x C'_{\triangle_n} \leqslant \omega^{\alpha'} m < \omega^\alpha$ и, следовательно, $\mathrm{Ind}_x C' \leqslant \omega^\alpha$, так как $\mathrm{Ind}_x C' = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ind}_x C'_{\triangle'_n}$.

Пусть теперь $\mathrm{Ind}_x C = \omega^\alpha n + \beta$, $\beta < \omega^\alpha$. Тогда существует только конечное число прямоугольников $\triangle$ решета C, для которых $\mathrm{Ind}_x C_\triangle \geqslant \omega^\alpha$. В самом деле, таких прямоугольников 1-го ранга может быть только конечное число, так как $\mathrm{Ind}_x C < \omega^{\alpha+1}$. Тогда, если бы таких прямоугольников было бесконечно много, то нашелся бы хотя один прямоугольник 1-го ранга $\triangle_{n_1}$, в котором бесконечно много прямоугольников, для которых $\mathrm{Ind}_x C_\triangle \geqslant \omega^\alpha$. Рассуждая таким же образом дальше, мы нашли бы внутри $\triangle_{n_1}$ прямоугольник 2-го ранга $\triangle_{n_1 n_2}$, в котором бесконечно много прямоугольников, для которых $\mathrm{Ind}_x C_\triangle \geqslant \omega^\alpha$, и т. д., т. е. мы получили бы цепь решета C

$$\triangle_{n_1} \supset \triangle_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \triangle_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \cdots,$$

определяющую точку x, что невозможно, так как по предположению x — внешняя точка для множества E. И так как каждый прямоугольник

решета C содержится в решете C' не более чем один раз, и по предположению лемма верна для $\gamma < \omega^{\alpha}$, то и решето C' имеет только конечное число прямоугольников, для которых $\mathrm{Ind}_x C'_{\Delta'} \geqslant \omega^{\alpha}$. А следовательно, $\mathrm{Ind}_x C' < \omega^{\alpha+1}$, так как в противном случае существовала бы бесконечная последовательность прямоугольников, каждый последующий из которых расположен над предыдущим и для которых $\mathrm{Ind}_x C'_{\Delta} \geqslant \geqslant \omega^{\alpha}$. Следовательно, $\mathrm{Ind}_x C' \leqslant \omega^{\alpha} m$, где m — конечное число. И так как наше предложение верно для случая, когда $\mathrm{Ind}_x C$ конечен, то оно верно для любого трансфинита α.

Ч. Т. Д.

ЛЕММА II. *Если* $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \supset E_{n+1}$ и E_n *определяется решетом* C_n, *подчиненным* C_{n-1}, *то* E *может быть определено решетом, подчиненным* C_1.

Можно предположить, что элементы ранга 1 для C_n имеют ранг $\geqslant 2$ для C_{n-1}. При построении решета C, определяющего E, берем в качестве прямоугольников ранга 1 все прямоугольники решета C_1 1-го ранга, а в качестве прямоугольников ранга n все прямоугольники ранга 1 решета C_n, помещая их внутри тех прямоугольников ранга 1 решета C_{n-1}, которым они для этого решета подчинены. Легко видеть, что решето C подчинено решету C_1. Покажем, что множество $\mathscr{E}$, определенное решетом C, тождественно E. Пусть $x \subset \mathscr{E}$. Тогда существует цепь прямоугольников решета C:

$$\Delta_{n_1} \supset \Delta_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \cdots \supset \xi;$$

проекция точки ξ в J_x совпадает с x. Прямоугольник ранга $k = n + s$ в этом ряду будет по построению прямоугольником ранга $\geqslant s+1$ для решета C_n, подчиненным соответствующему прямоугольнику ранга $\geqslant s$ этого решета, совпадающему с $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Следовательно, все прямоугольники нашей цепи, начиная с k-го, совпадают с прямоугольниками некоторой цепи решета C_k и $x \subset E_k$, каково бы ни было k. Итак, $x \subset E$ и $\mathscr{E} \subset E$.

Пусть теперь $x \subset E$. Значит, $x \subset E_n$, каково бы ни было n. Поэтому существует прямоугольник $\Delta^{(1)}_{n_1}$ решета C_1, содержащий цепь, определяющую x. Таким же образом существует прямоугольник 1-го ранга решета C_2, содержащий цепь, определяющую x; этот прямоугольник должен, очевидно, для решета C_1 содержаться в $\Delta^{(1)}_{n_1}$, так как в других прямоугольниках решета C_1 1-го ранга нет цепей, определяющих x. Пусть найдено k прямоугольников $\Delta_{n_1} \supset \Delta_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ решета C, содержащих цепь, определяющую x, причем $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ является прямоугольником 1-го ранга для решета C_k. Так как $x \subset E_{k+1}$, то найдется прямоугольник 1-го ранга решета C_{k+1}, содержащий цепь, определяющую x, и этот прямоугольник для решета C_k содержится, очевидно, в $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Таким образом мы построим цепь прямоугольников решета C:

$$\Delta_{n_1} \supset \Delta_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \cdots$$

Проекция каждого из этих прямоугольников в J_x содержит, очевидно, точку x, и, следовательно, цепь определяет точку x. Значит, $x \subset \mathcal{E}$ и $E \subset \mathcal{E}$, а потому $\mathcal{E} \equiv E$.

Ч. Т. Д.

Пусть теперь E какое-нибудь измеримое B множество класса α, $\mathrm{cl}\, E = \alpha$. Тогда $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n — элемент класса не выше α; $E_n \leqslant \text{él}\, \alpha$ и $E_n = \prod_k \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} E^{(n)}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, $E^{(n)}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \text{él}\, \alpha'$, $\alpha' < \alpha$, и существует только конечное число множеств $E^{(n)}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ диаметра $> \varepsilon$, каково бы ни было ε; кроме того, в силу доказанной нами теоремы [4] для каждого E_n можно предположить, что все цепи образующей системы $\{E^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ не пусты. Таким образом множество E может быть определено упорядоченным α-гребенчатым решетом Γ_α, все цепи которого не пусты и определяют по одной точке, и проекции гребенок в J_x совпадают со всевозможными множествами системы $\{E^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$, $(n, n_k) = 1, 2, \ldots \infty$, которую мы будем называть о б р а з у ю щ е й с и с т е м о й м н о ж е с т в а E.

Образующую систему, все цепи которой не пусты и определяют по одной точке множества E, мы будем называть п р а в и л ь н о й. Заменяя каждую гребенку решета Γ_α наименьшим содержащим его прямоугольником, мы получим прямоугольное решето C, которое в силу правильности образующей системы определяет, очевидно, то же самое множество E. Такое решето мы будем называть с о о т в е т с т в у ю щ и м данной правильной образующей системе множества E.

Мы будем в дальнейшем рассматривать только решета, определяющие множество E и соответствующие его правильным образующим системам $\{E^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$, и покажем, что среди таких решет существуют м и н и м а л ь н ы е. Для этого мы определим минимальный индекс для указанных решет, определяющих множество E, и покажем, что этот индекс является минимальным для произвольных решет, определяющих E.

Предположим, что рассматриваемое нами измеримое B множество $\mathcal{E}$ лежит внутри какого-то элемента E, заданного правильной образующей системой. Будем рассматривать класс множества $\mathcal{E}$ относительно E, $\mathrm{cl}\, \mathcal{E}(E)$ [4], и в том случае, когда $\mathcal{E}$ является элементом класса α относительно E, будем писать: $\mathcal{E} = \text{él}\, \alpha(E)$.

Множество $\mathcal{E}$ класса α относительно E может быть задано решетом, элементами которого являются гребенки классов $\alpha' < \alpha$ относительно E; каждую из этих гребенок можно разбить на счетное число гребенок таким образом, что все цепи вновь полученного решета не пусты, причем классы всех его гребенок относительно E остаются $< \alpha$. Доказательство этого предложения совершенно такое же, как для случая, когда E — пространства Бэра J_x [4]. Следовательно, мы можем всегда предполагать, что образующая система множества $\mathcal{E}$ правильная.

Докажем теперь ряд предложений, с помощью которых можно будет дать точное определение индексов минимальных решет, определяющих множества измеримые B.

Заметим, что *если* $\mathscr{E}=F(E)$, $\mathscr{E}$ *замкнуто относительно* E, *то* $\mathscr{E}$ *может быть определено решетом* C', *которое составляет часть решета* C, *определяющего* E (*т. е. получено из решета* C *выбрасыванием некоторых его элементов*).

В самом деле,

$$E=\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1 n_2\ldots n_k} E_{n_1 n_2\ldots n_k}.$$

Множество $\mathscr{E}$ получится, если выкинуть из E счетное число α-порций, поэтому

$$E=\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{\mathscr{E}\cdot E_{n_1 n_2\ldots n_k}\neq 0} E_{n_1 n_2\ldots n_k}$$

и, следовательно, образующая система для $\mathscr{E}$ составляет часть образующей системы для E, и значит, соответствующее этой образующей системе решето C' есть часть решета C; следовательно, для всякой точки x, внешней для E,

$$\mathrm{Ind}_x C'\leqslant \mathrm{Ind}_x C.$$

Пусть теперь $\mathscr{E}=F_\sigma(E)$;

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_n+\ldots,$$
$$\mathscr{E}_i\cdot\mathscr{E}_j=0;\ \mathscr{E}_n=F(E);$$

$\mathscr{E}_n$ заключено в счетном числе непересекающихся α-порций множества E, выброшенных из него при построении множества $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_{n-1}$. Покажем, что $\mathscr{E}=F_\sigma(E)$ *может быть представлено как сумма счетного числа непересекающихся замкнутых относительно* E *множеств* $\mathscr{E}=\mathscr{E}'_1+\mathscr{E}'_2+\ldots+\mathscr{E}'_n+\ldots$, *причем* $\mathscr{E}'_n$ *заключено в одной только порции* E, *выброшенной при построении* $\mathscr{E}'_1+\mathscr{E}'_2+\ldots+\mathscr{E}'_{n-1}$.

Перенумеровав множество всех непересекающихся α-порций E, выброшенных при построении каждого множества $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_n$, получим таблицу

$$\begin{array}{l} E^{11},\ E^{12},\ldots,\ E^{1m},\ldots\\ E^{21},\ E^{22},\ldots,\ E^{2m},\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ E^{n1},\ E^{n2},\ldots,\ E^{nm},\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

где E^{nm} — m-ая α-порция, выкинутая при построении множества $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_n$. Множество всех этих α-порций можно перенумеровать в бесконечную последовательность таким образом, что если одна из них содержит другую, то она имеет в этой последовательности меньший порядковый номер

$$E_1^{n_1},\ E_2^{n_2},\ldots,E_k^{n_k},\ldots,$$

где верхний индекс n_k указывает номер n_k множества $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_{n_k}$, при построении которого выкинута α-порция $E_k^{n_k}$, т. е. совпадает с первым индексом этой порции в нашей таблице.

Рассмотрим теперь последовательность замкнутых относительно E множеств

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_{n_1+1}\cdot E_1^{n_1}, \mathcal{E}_{n_2+1}\cdot E_2^{n_2}, \ldots, \mathcal{E}_{n_k+1}\cdot E_k^{n_k}, \ldots$$

Сумма множеств этой последовательности совпадает с $\mathcal{E}$, и легко видеть, что последовательность удовлетворяет поставленному выше условию: множество $\mathcal{E}_{n_k+1}\cdot E_k^{n_k}$ входит в α-порцию $E_k^{n_k}$, выкинутую из множества

$$\mathcal{E}_k^* = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{n_1+1}\cdot E_1^{n_1} + \mathcal{E}_{n_2+1}\cdot E_2^{n_2} + \cdots + \mathcal{E}_{n_{k-1}+1}\cdot E_{k-1}^{n_{k-1}}.$$

Действительно, если бы α-порция $E_k^{n_k}$ не была выкинута из $\mathcal{E}_k^*$, то существовала бы точка $\xi \subset \mathcal{E}_k^* \cdot E_k^{n_k}$ и, следовательно, номер $i < k$ такой, что $\xi \subset \mathcal{E}_{n_i+1}\cdot E_i^{n_i}$. В силу выбранного нами порядка нумерации α-порций $E_k^{n_k}$ следует, что $E_i^{n_i} \supset E_k^{n_k}$ и $n_i < n_k$; но $\xi \subset \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_{n_i+1}$ и поэтому α-порция $E_k^{n_k}$ не может быть целиком выкинута из этого множества и из множества $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_{n_i+1} + \cdots + \mathcal{E}_{n_k}$, что противоречит условию.

Итак, последовательность множеств $\mathcal{E}'_k = \mathcal{E}_{n_k+1}\cdot E_k^{n_k}$ удовлетворяет нашему условию. Заметим, что если $i < k$, то $\mathcal{E}'_k$ входит также в одну только α-порцию множества E, выброшенную при построении $\mathcal{E}'_i$. Очевидно, мы можем всегда предположить, что и множество $\mathcal{E}'_1$ заключено в какой-то α-порции множества E.

Построим теперь образующую систему для множества $\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_n$ таким образом, чтобы соответствующее решето $\overline{C}$ было подчинено решету C, определяющему E. Для этого достаточно положить

$$\mathcal{E}'_n = \prod_{k>p}^{\infty} \sum_{E_{n_1n_2\ldots n_k}\cdot \mathcal{E}'_n \neq 0} E_{n_1n_2\ldots n_k},$$

где p — ранг наименьшей α-порции множества E, содержащей $\mathcal{E}'_n$, разбить основной квадрат (со сторонами, равными 1) пространства J_{xy} на счетное число горизонтальных полос, стремящихся к его верхней стороне, и в полосе номера n поместить решето C_n, определяющее $\mathcal{E}'_n$ и соответствующее его образующей системе. Каждый элемент решета $\overline{C}$ принадлежит, очевидно, решету C и каждый элемент решета C содержится в решете $\overline{C}$ не больше одного раза.

Действительно, пусть какой-нибудь элемент решета $\overline{C}$ соответствует множеству $E_{n_1n_2\ldots n_k}$, входящему в образующую систему множества $\mathcal{E}'_n$. В силу того что $\mathcal{E}'_n$ заключено в какой-то порции $E\cdot E_{n_1n_2\ldots n_i}$, $i < k$, выброшенной из множества $\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 + \cdots + \mathcal{E}_{n-1}$, имеем, очевидно,

$$\mathcal{E}'_j \cdot E_{n_1n_2\ldots n_k} = 0, \quad j < n,$$

и, следовательно, $E_{n_1n_2\ldots n_k}$ не входит в образующую систему для $\mathcal{E}'_j$. Таким же образом $E_{n_1n_2\ldots n_k}$ не входит в образующую систему для $\mathcal{E}'_j$,

$j > n$, так как $\mathcal{E}'_j$ заключено в порцию $E_{n'_1 n'_2 \ldots n'_i} \cdot E$ множества E, которая либо не пересекается с $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, либо в ней содержится, не совпадая с ней. Отсюда легко видеть, что решето $\overline{C}$ подчинено решету C.

Перейдем теперь к построению образующей системы для множества $\mathcal{E} = F_{\sigma\delta}(E)$ и соответствующего решета $\overline{C}$, подчиненного решету C. Пусть

$$\mathcal{E} = F_{\sigma\delta}(E) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} \mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

причем $\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = F(E)$ и образующая система $\{\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ правильная. Мы разбиваем теперь каждое множество $\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ на сумму счетного числа замкнутых относительно E множеств таким образом, чтобы сумма всех множеств ранга k этой новой системы, подчиненных одному множеству $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$, была перенумерована так, чтобы множество $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n}$ входило в одну порцию $E_{m_1 \ldots m_i}$, выброшенную из $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$ при построении множества $\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} i}$. Легко видеть, что при таком преобразовании образующей системы множества $\mathcal{E}$ правильность ее сохраняется. Действительно, пусть

$$\mathcal{E}'_{n_1} \supset \mathcal{E}'_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \cdots \qquad \text{(A)}$$

цепь нашей новой образующей системы. Имеем, как легко видеть (на основании указанного выше метода разбиения $F_\sigma(E)$),

$$\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \mathcal{E}_{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot E^{(i_k)},$$

где $E^{(i_k)}$ — какое-то образующее множества E.

В силу $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} \supset \mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k}$ имеем, очевидно,

$$\mathcal{E}_{m_1 m_2 \ldots m_{k-1}} \supset \mathcal{E}_{m_1 m_2 \ldots m_k} \quad \text{и} \quad E^{(i_{k-1})} \supset E^{(i_k)}$$

и таким образом каждой цепи (A) соответствуют две цепи, элементы которых содержат соответственные элементы цепи (A): одна из этих цепей состоит из элементов первоначально заданной образующей системы множества $\mathcal{E}$, другая—из элементов образующей системы множества E. Обе эти цепи не пусты и сходятся, очевидно, к одной и той же точке x, так как в противном случае пересечение соответственных элементов обеих цепей, начиная с некоторого момента, было бы пустым. Эта точка x принадлежит, следовательно, всем элементам цепи (A), поэтому цепь (A) не пуста и сходится к точке x.

Чтобы построить элементарное решето $\overline{C}$, соответствующее образующей системе $\{\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ множества $\mathcal{E}$, мы строим сначала соответствующее ей гребенчатое решето и заменяем затем гребенку, соответствующую $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ содержащим ее прямоугольником, проекция кото-

рого в J_x совпадает с прямоугольником решета C, соответствующим наименьшему множеству $E_{m_1 m_2 \ldots m_i}$, содержащему $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$*.

Решето $C'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, определяющее $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, составляет часть решета C, так как $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} = F(E)$; решето, определяющее множество

$$\mathcal{E}'_{\sigma k+1} \cdot \mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k i},$$

подчинено решету $C'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Поэтому, заменяя каждый прямоугольник 1-го ранга (соответствующий множеству $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$) решета C'_k для $\mathcal{E}'_{\sigma k}$ содержащимся в нем и подчиненным $C'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ решетом, определяющим $\mathcal{E}'_{\sigma k+1} \cdot \mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, мы получим решето C'_{k+1}, определяющее $\mathcal{E}'_{\sigma k+1}$, которое, как легко видеть, подчинено решету C'_k, причем элементы 1-го ранга решета C'_{k+1} имеют ранг $\geqslant 2$ в решете C'_k. Поэтому решето $\overline{C}$, определяющее множество $\mathcal{E}$, построено из решет C'_k по методу, указанному в лемме II. Следовательно, $\overline{C}$ подчинено C.

Ч. Т. Д.

Займемся теперь оценкой индексов решета $\overline{C}$ в зависимости от индексов решета C. В дальнейшем мы будем обозначать через x_e внешнюю точку рассматриваемого множества и через x_i — его внутреннюю точку.

Индекс решета, определяющего E и соответствующего заданной образующей системе, в точке, внешней для E, мы будем обозначать $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_e} E$; индекс же этого решета в точке, внешней для E, но внутренней для какого-то множества $\mathcal{E}$, — через $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(\varepsilon)} E$, а в точке, внешней для $\mathcal{E}$, — через $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_e(\varepsilon)} E$.

Минимальный индекс множества E мы будем обозначать $\mathrm{Ind}\, E$; индекс решета, соответствующего какой-то заданной образующей системе множества E, — через $\widetilde{\mathrm{Ind}}\, E$. Если множество E определено решетом C, то часть его, определенную частью решета C, заключенной внутри какого-то его прямоугольника $\triangle$, мы будем обозначать $E_\triangle$, а соответствующую часть решета C — через $C_\triangle$.

Докажем теперь ряд предложений, с помощью которых нам удастся произвести оценку индексов множеств измеримых B. Условимся при этом писать: $\alpha = \alpha^* + n$, где α^* — наибольшее число второго рода, меньшее или равное α или нуль.

ЛЕММА IIIa. *Если* $\mathcal{E} = F_{\sigma\delta}(E)$, $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geqslant 1$ *и* $\widetilde{\mathrm{Ind}}\, E \leqslant \omega^\alpha$, $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(E_\triangle)}(E - E_\triangle) < \omega^\alpha$ *и* $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(E)} E_\triangle < \omega^{\alpha-1}$, *если* $x_i \not\subset E_\triangle$, *то можно так разбить каждое образующее множества* $\mathcal{E}$ *на счетное число слагаемых* $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} = F(E)$, *что* $\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathcal{E} \leqslant \omega^\alpha \cdot 2$ *и* $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_\triangle)}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_\triangle) < \omega^\alpha$.

---

* Этот прямоугольник может не совпадать с наименьшим прямоугольником, проекция которого содержит $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Однако, легко видеть, что, добавляя к каждому $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ не более счетного множества точек таким образом, чтобы ни одна из них не добавилась при этом к $\mathcal{E}$, мы можем изменить $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ так, что взятый прямоугольник окажется наименьшим из тех, проекция которых содержит $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Разбиение образующей системы множества $\mathcal{E}$ производится по указанному выше способу, и поэтому для доказательства леммы нужно произвести оценку индексов решета $\overline{C}$ в различных точках J_x. Прежде всего заметим, что решето $\overline{C}$ упорядочено и подчинено решету C, определяющему E, и потому для всякой точки x, внешней для E, имеем в силу леммы I:

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_e(E)}\,\mathcal{E} < \omega^{\alpha}. \tag{1}$$

Оценим теперь $\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\,\mathcal{E}$ в точке x множества $E - \mathcal{E}_{\sigma 1}$. Пусть $\triangle_{n_1}$ прямоугольник 1-го ранга решета $\overline{C}$. По построению часть решета $\overline{C}$, заключенная в $\triangle_{n_1}$, подчинена решету C'_{n_1}, определяющему множество $\mathcal{E}'_{n_1}$, а это решето составляет часть решета C. По условию точка x не входит в $\mathcal{E}'_{n_1}$, а потому при построении решета C'_{n_1} из C выкинута часть, лежащая внутри какого-то прямоугольника, содержащего цепь, определяющую точку x. Поэтому $\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\,C'_{n_1} < \omega^{\alpha}$, так как $x \subset E_{\triangle}$, и по условию нашей леммы $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(E_\Delta)}\,(E - E_\Delta) < \omega^{\alpha}$. И так как часть решета $\overline{C}$, заключенная в $\triangle_{n_1}$, подчинена решету C'_{n_1} и $x \not\subset \mathcal{E}'_{n_1}$, то в силу леммы I имеем:

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\,\mathcal{E} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{Ind}_x\,\overline{C}_{\triangle_{n_1}} \leqslant \omega^{\alpha} \quad (x \subset E - \mathcal{E}_{\sigma 1}). \tag{2}$$

Оценим далее $\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\,\mathcal{E}$ в точке $x \subset \mathcal{E}'_{\sigma 1} - \mathcal{E}'_{\sigma 2}$. Существует множество $\mathcal{E}'_{n_1}$ такое, что $x \subset \mathcal{E}'_{n_1} - \mathcal{E}'_{\sigma 2}$. Пусть $\triangle_i$ какой-то прямоугольник 1-го ранга решета $\overline{C}$. Для $i < n_1$ совершенно так же, как в предыдущем случае, имеем: $\underset{i<n_1}{\mathrm{Ind}_x}\,\overline{C}_{\triangle_i} < \omega^{\alpha}$. В случае $i = n_1$ мы замечаем, что решето $\overline{C}_{\triangle_i}$ подчинено решету C'_{n_1}, определяющему $\mathcal{E}'_{n_1}$, и благодаря условию $x \subset \subset \mathcal{E}'_{n_1} - \mathcal{E}'_{\sigma 2}$ мы имеем здесь случай, вполне аналогичный случаю $x \subset E - \mathcal{E}_{\sigma 1}$. Поэтому $\mathrm{Ind}_x\,\overline{C}_{\triangle_{n_1}} \leqslant \omega^{\alpha}$.

Остается рассмотреть случай $i > n_1$. Но в этом случае множество $\mathcal{E}'_i$ заключено в каком-то образующем $E_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ множества E, выброшенном из него при построении множества $\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 + \ldots + \mathcal{E}'_{n_1}$, и следовательно, не содержащем точки x. Поэтому, если $\triangle_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ прямоугольник решета C, соответствующий $E_{m_1 m_2 \ldots m_s}$, то по условию леммы $\mathrm{Ind}_x\,C_{\triangle_{m_1 m_2 \ldots m_s}} < \omega^{\alpha-1}$. Но прямоугольник $\triangle_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ решета C совпадает с прямоугольником $\triangle_i$ решета $\overline{C}$, соответствующим $\mathcal{E}'_i$. Следовательно, решето $\overline{C}_{\triangle_i}$ подчинено решету $C_{\triangle_{m_1 m_2 \ldots m_s}}$, а тогда в силу леммы I $\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\,\overline{C}_{\triangle_i} < < \omega^{\alpha-1}$. Суммируя индексы в точке x решет $\overline{C}_{\triangle_i}$ для всех прямоугольников 1-го ранга, получим:

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\,\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ind}_x\,\overline{C}_{\triangle_i} \leqslant \omega^{\alpha} + \omega^{\alpha-1} < \omega^{\alpha} \cdot 2 \quad (x \subset \mathcal{E}'_{\sigma 1} - \mathcal{E}'_{\sigma 2}).$$

Пусть теперь $x \subset \mathcal{E}'_{\sigma k} - \mathcal{E}'_{\sigma k+1}$; тогда существует такое $\mathcal{E}^{4}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, что $x \subset \mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} - \mathcal{E}'_{\sigma k+1}$. Рассматривая таким же образом, как в предыдущем случае, сначала все прямоугольники решета $\overline{C}$ 1-го ранга

Δ_i, $i < n_1$ и $i > n_1$, затем все подчиненные Δ_{n_1} прямоугольники 2-го ранга $\Delta_{n_1 i}$, $i < n_1$ и $i > n_1$ и т. д. и, наконец, прямоугольник $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, мы получим:

$$\widetilde{\text{Ind}}_x \mathscr{E} = \sum_{i<n_1} \text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_i} + \sum_{i<n_2} \text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 i}} + \cdots + \sum_{i<n_k} \text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} i}} +$$

$$+ \text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}} + \sum_{i>n_k} \text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} i}} + \cdots + \sum_{i>n_1} \text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_i}, \tag{3}$$

откуда

$$\widetilde{\text{Ind}}_x \mathscr{E} \leqslant \omega^\alpha + \omega^{\alpha-1} \cdot k < \omega^\alpha \cdot 2 \quad (x \subset \mathscr{E}'_{\sigma k} - \mathscr{E}'_{\sigma k+1}). \tag{4}$$

Из неравенств (1), (2) и (4) следует, что

$$\widetilde{\text{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^\alpha \cdot 2.$$

Нам остается еще рассмотреть внутреннюю точку $x_i(\mathscr{E})$. Но в этом случае существует цепь решета $\overline{C}$, определяющая эту точку x

$$\Delta_{n_1} \supset \Delta_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \cdots,$$

где прямоугольник $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ соответствует множеству $\mathscr{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Нам нужно оценить индекс в точке x решета $\overline{C} - \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}}$, которое получается выбрасыванием части $\overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}}$ из $\overline{C}$. Рассуждая так же, как при доказательстве неравенства (4), мы увидим, что индекс в точке x части решета $\overline{C}$, находящейся *ниже* $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, меньше, чем ω^α, а индекс в точке x части решета $\overline{C}$, лежащей над $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, не больше, чем $\omega^{\alpha-1} \cdot k$. Следовательно, $\text{Ind}_x (\overline{C} - \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}}) < \omega^\alpha$, и, значит,

$$\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_\Delta)} (\mathscr{E} - \mathscr{E}_\Delta) < \omega^\alpha.$$

Ч. т. д.

ЛЕММА IIIb. *Если* $\mathscr{E} = F_{\sigma\delta}(E)$ *и* $\widetilde{\text{Ind}}\, E \leqslant \omega^\alpha \cdot 2$, *а* $\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(E_\Delta)} (E - E_\Delta) < \omega^\alpha$, *то можно так разбить каждое образующее множества* $\mathscr{E}$ *на счетное число слагаемых* $\mathscr{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} = F(E)$, *что* $\widetilde{\text{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\alpha+1}$, $\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_\Delta)} (\mathscr{E} - \mathscr{E}_\Delta) < \omega^{\alpha+1}$, *и если* $x_i \not\subset \mathscr{E}_\Delta$, *то* $\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathscr{E})} \mathscr{E}_\Delta < \omega^\alpha$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы IIIa. Прежде всего, так как решето $\overline{C}$, определяющее $\mathscr{E}$, подчинено решету C, определяющему E, то в силу леммы I имеем для каждой точки, внешней для E:

$$\widetilde{\text{Ind}}_{x_e(E)} \mathscr{E} \leqslant \omega^\alpha m < \omega^{\alpha+1}. \tag{5}$$

Пусть $x \subset E - \mathscr{E}'_{\sigma 1}$ и Δ_{n_1} прямоугольник решета $\overline{C}$ 1-го ранга. Тогда решето $\overline{C}_{\Delta_{n_1}}$ подчинено решету C'_{n_1}, определяющему $\mathscr{E}'_{n_1}$, а это решето составляет часть решета C, определяющего E, причем при получении решета C'_{n_1} из C выкинута целиком часть, заключенная внутри какого-то прямоугольника Δ, содержащего цепь, определяющую нашу точку $x \subset E - \mathscr{E}'_{n_1}$. Поэтому $\text{Ind}_x C'_{n_1} \leqslant \widetilde{\text{Ind}}_x (E - E_\Delta)$, где $x \subset E_\Delta$, и по условию леммы $\text{Ind}_x C'_{n_1} < \omega^\alpha$, откуда в силу леммы I $\text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1}} < \omega^\alpha$. Суммируя по всем прямоугольникам 1-го ранга, найдем:

$$\widetilde{\text{Ind}}_x \mathscr{E} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \text{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1}} \leqslant \omega^\alpha \quad (x \subset E - \mathscr{E}'_{\sigma 1}). \tag{6}$$

Пусть теперь $x \subset \mathscr{E}'_{ck} - \mathscr{E}'_{ck+1}$. Тогда существует такое $\mathscr{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, что $x \subset \mathscr{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} - \mathscr{E}'_{ck+1}$. Для всех прямоугольников 1-го ранга Δ_i, кроме Δ_{n_1}, так же, как и в предыдущем случае, имеем $\operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_i} < \omega^\alpha$, $i \neq n_1$. По тем же самым соображениям для всех прямоугольников $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_s i}$, $s < k$, $i \neq n_{s+1}$ имеем $\operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_s i}} < \omega^\alpha$. Рассматривая же прямоугольник $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ и замечая, что $x \subset \mathscr{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k} - \mathscr{E}'_{ck+1}$, мы имеем случай, аналогичный случаю $x \subset E - \mathscr{E}'_{c1}$, а потому $\operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}} \leqslant \omega'$. На основании полученных неравенств в силу (3) легко заключить, что

$$\widetilde{\operatorname{Ind}}_x \mathscr{E} \leqslant \omega^\alpha (k+1) < \omega^{\alpha+1} \quad (x \subset \mathscr{E}'_{ck} - \mathscr{E}'_{ck+1}). \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7), очевидно, следует, что

$$\widetilde{\operatorname{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\alpha+1}.$$

Остается рассмотреть внутреннюю точку x_i. Точка x_i определяется цепью

$$\Delta_{n_1} \supset \Delta_{n_1 n_2} \supset \cdots \supset \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \cdots$$

Как мы уже видели, для всякого прямоугольника, не принадлежащего цепи $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} s}$, $s \neq n_k$, имеем:

$$\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(\mathscr{E})} \mathscr{E}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} s}} = \operatorname{Ind}_{x_i(\mathscr{E})} \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} s}} < \omega^\alpha$$
$$s \neq n_k, \quad x_i(\mathscr{E}) \not\subset \mathscr{E}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} s}}.$$

Что же касается $\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}})} (\mathscr{E} - \mathscr{E}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}})$, то он получается, если из формулы (3) выбросить слагаемое $\operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}}$, откуда в силу доказанных неравенств для слагаемых формулы (3) имеем:

$$\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_\Delta)} (\mathscr{E} - \mathscr{E}_\Delta) \leqslant \omega^\alpha k < \omega^{\alpha+1}.$$

Ч. Т. Д.

Вследствие того что для случая, когда $E = \text{él}\,\alpha$, где α — трансфинитное число второго рода, и $\mathscr{E} = \text{él}\,(\alpha+1)$, $\mathscr{E} \subset E$, существует такая образующая система множества E, при которой $\mathscr{E} = G_\delta(E)$, нам нужно еще изучить структуру решета, определяющего $G_\delta(E)$. Пусть E задано правильной образующей системой $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$,

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} E_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

и C решето, определяющее E и соответствующее этой образующей системе.

Всякое открытое относительно E множество $G(E)$ является суммой счетного числа α-порций множества E,

$$G(E) = \sum_{i=1}^{\infty} E \cdot E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

и поэтому решето, его определяющее, получится, если разбить основной квадрат со сторонами, равными 1, пространства J_{xy} на счетное

число горизонтальных полос и в полосе номера i поместить часть решета C, определяющую порцию $E\cdot E_{n_1n_2\ldots n_{k_i}}$. Эта часть, очевидно, есть часть решета C, заключенная в прямоугольнике $\triangle_{n_1n_2\ldots n_{k_i}}$, соответствующем множеству $E_{n_1n_2\ldots n_{k_i}}$. Различные порции, входящие в сумму для $G(E)$, не пересекаются между собой и поэтому решето, определяющее $G(E)$, подчинено решету C.

Таким же образом, если даны два множества $G_1(E)$ и $G_2(E)$, причем $G_1(E)\supset G_2(E)$, то $G_2(E)$ может быть определено решетом C_2, подчиненным решету C_1, определяющему $G_1(E)$. И так как всякое $G_\delta(E)$ может быть получено как пересечение убывающей последовательности множеств $G(E)$

$$G_\delta(E)=\prod_{n=1}^{\infty}G_n(E),\quad G_n(E)\supset G_{n+1}(E),$$

то в силу леммы II $G_\delta(E)$ может быть определено решетом $\overline{C}$, подчиненным решету C. Решето $\overline{C}$ соответствует образующей системе множества $G_\delta(E)$, которая получится, если положить

$$G_n(E)=\sum_{i=1}^{\infty}E\cdot E^{(n)}_{n_1n_2\ldots n_{k_i}}\quad\text{и}\quad G_\delta(E)=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}E^{(n)}_{n_1n_2\ldots n_{k_i}},$$

так как можно всегда предположить, что каждое слагаемое в сумме для $G_{n+1}(E)$ входит в какое-то слагаемое для $G_n(E)$ и имеет в образующей системе множества E ранг б о л е е в ы с о к и й, чем это содержащее его слагаемое для $G_n(E)$.

ЛЕММА IV. *Если α трансфинитное число второго рода*, $\widetilde{\operatorname{Ind}}\,E\leqslant\omega^\alpha$, $\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(E_\triangle)}(E-E_\triangle)<\omega^\alpha$ и $\mathscr{E}=G_\delta(E)$, *то существует образующая система* $\mathscr{E}$ *такая, что* $\widetilde{\operatorname{Ind}}\,\mathscr{E}\leqslant\omega^\alpha\cdot 2$ и $\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_\triangle)}(\mathscr{E}-\mathscr{E}_\triangle)<\omega^\alpha$.

Пусть E задано решетом C, соответствующим его образующей системе, а $\mathscr{E}=G_\delta(E)$ решетом, построенным, как указано выше. Для удобства мы будем образующие множества $\mathscr{E}$ обозначать через $\mathscr{E}_{n_1n_2\ldots n_k}$; каждое из этих образующих является, как мы видели, также и образующим множества E. В силу того что решето $\overline{C}$ подчинено решету C, имеем:

$$\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_e(E)}\,\mathscr{E}<\omega^\alpha. \tag{8}$$

Пусть $x\subset E-\mathscr{E}_{\sigma 1}$. Рассмотрим прямоугольник $\triangle_{n_1}$ 1-го ранга решета $\overline{C}$, соответствующий образующему $\mathscr{E}_{n_1}$ множества $\mathscr{E}$. Часть решета $\overline{C}$, заключенная внутри $\triangle_{n_1}$, $\overline{C}_{\triangle_{n_1}}$, подчинена решету C_{n_1}, определяющему порцию $E\cdot\mathscr{E}_{n_1}$ множества E, отсекаемую его образующим $\mathscr{E}_{n_1}$, а это решето C_{n_1} составляет часть решета C, заключенную внутри прямоугольника, соответствующего множеству $\mathscr{E}_{n_1}$; $x\not\subset\mathscr{E}_{n_1}$, поэтому по условию леммы

$$\operatorname{Ind}_{x_e(E\cdot\mathscr{E}_{n_1})}\overline{C}_{\triangle_{n_1}}\leqslant\operatorname{Ind}_{x_e(E\cdot\mathscr{E}_{n_1})}C_{n_1}<\omega^\alpha.$$

Суммируя по всем прямоугольникам 1-го ранга, получим:

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_x' \mathscr{E}' = \sum_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1}} \leqslant \omega^{\alpha} \quad (x \subset E - \mathscr{E}_{\sigma 1}). \tag{9}$$

Пусть $x \subset \mathscr{E}_{\sigma k} - \mathscr{E}_{\sigma k+1}$. В этом случае существует такое $\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, что $x \subset \mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} - \mathscr{E}_{\sigma k+1}$. Рассмотрим часть решета $\overline{C}$, лежащую внутри прямоугольника $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_s i}$, $s < k$, $i \neq n_{s+1}$. Эта часть $\overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_s i}}$ подчинена решету $C_{n_1 n_2 \ldots n_s i}$, определяющему порцию $E \cdot \mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_s i}$ и являющемуся частью решета C, содержащейся в прямоугольнике $\Delta_{(\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_s i})}$, соответствующем образующему $\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_s i}$. Но

$$\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_s i} \cdot \mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_s n_{s+1}} = 0,$$

и тем более

$$\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_s i} \cdot \mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = 0.$$

Поэтому решето $C_{n_1 n_2 \ldots n_s i}$ является **частью** решета $C - C_{\Delta(\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k})}$, полученной выбрасыванием из C всей части, заключенной в прямоугольнике, соответствующем образующему $\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Но по условию леммы

$$\mathrm{Ind}_{x_i(\mathscr{E}_{n_1 \ldots n_k})} (C - C_{\Delta(\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k})}) < \omega^{\alpha}$$

и так как α трансфинитное число второго рода, то существует такое $\alpha' < \alpha$, что $\mathrm{Ind}_{x_i(\mathscr{E}_{n_1 \ldots n_k})} (C - C_{\Delta(\mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k})}) < \omega^{\alpha'}$ и потому: каково бы ни было $s < k'$ и $i \neq n_{s+1}$, имеем:

$$\mathrm{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_s i}} \leqslant \mathrm{Ind}_x C_{n_1 n_2 \ldots n_s i} < \omega^{\alpha'}$$
$$x \not\subset \mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_s i} \cdot \mathscr{E}.$$

Что же касается части нашего решета $\overline{C}$, заключенной в прямоугольнике $\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, то в силу того, что $x \subset \mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} - \mathscr{E}_{\sigma k+1}$, мы имеем здесь случай, аналогичный тому, когда $x \subset E - \mathscr{E}_{\sigma 1}$. Поэтому в силу неравенства (9)

$$\mathrm{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}} \leqslant \omega^{\alpha},$$
$$x \subset \mathscr{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} - \mathscr{E}_{\sigma k+1},$$

и применяя для вычисления $\widetilde{\mathrm{Ind}}_x \mathscr{E}$ формулу (3), мы легко находим

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{\mathrm{Ind}}_x \mathscr{E} \leqslant \omega^{\alpha} + \omega^{\alpha'} k < \omega^{\alpha} \cdot 2, \\ &x \subset \mathscr{E}_{\sigma k} - \mathscr{E}_{\sigma k+1}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Из неравенств (8), (9) и (10) следует, что

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\alpha} \cdot 2.$$

Рассматривая, наконец, точку x_i, внутреннюю для $\mathscr{E}$ и определенную цепью

$$\Delta_{n_1} \supset \Delta_{n_1 n_2} \supset \ldots \supset \Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \ldots,$$

и замечая, что для вычисления $\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}})}(\mathscr{E}-\mathscr{E}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}})$ достаточно из правой части равенства (3) выбросить слагаемое $\operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\Delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}}$, находим:

$$\widetilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_\Delta)}(\mathscr{E}-\mathscr{E}_\Delta) \leqslant \omega^{\alpha'} k < \omega^{\alpha}.$$

Ч. Т. Д.

ЛЕММА V. *Если $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$ счетная последовательность множеств $\operatorname{cl} \mathscr{E}_n(E) = \alpha + \beta_n$, $\alpha \geqslant 2$, и $E' = \text{él}\, \alpha(E)$ такое, что $\mathscr{E}_n \subset \subset E' \subset E$, то образующую систему множества E' можно преобразовать так, чтобы $\operatorname{cl} \mathscr{E}_n(E') \leqslant 2 + \beta_n$, если α трансфинитное число первого рода, и $\operatorname{cl} \mathscr{E}_n(E') \leqslant 1 + \beta_n$, если α трансфинитное число второго рода.*

Пусть α трансфинит 1-го рода [α трансфинит 2-го рода] и $\{E'_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ какая-то правильная образующая система множества E', так что все $E'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ являются элементами классов α' относительно E, причем $\alpha' < < \alpha - 1$ [$\alpha' < \alpha$]. Каждое множество $\mathscr{E}_n$ может быть получено из какого-то счетного запаса элементов (e_k^n), классы которых относительно E меньше, чем $\alpha - 1$ [меньше, чем α]

$$e_k^n = \text{él}\, \alpha'(E), \quad \alpha' < \alpha - 1 \quad [\alpha' - \alpha],$$

причем для получения из системы (e_k^n) множества $\mathscr{E}_n$ нужно произвести $2 + \beta_n$ $[1 + \beta_n]$ последовательных операций перехода к пределу. Совершенно таким же образом, как мы это делали раньше для случая $E \equiv J_x$, можно показать, что образующую систему множества E' можно преобразовать так, чтобы каждое $e_k^n \cdot E'$ превратилось в множество нулевого класса относительно E' [4]:

$$\operatorname{cl} e_k^n \cdot E'(E') = 0.$$

А тогда в этой новой образующей системе для множества E' имеем, очевидно, $\operatorname{cl} \mathscr{E}_n(E') \leqslant 2 + \beta_n$, если α трансфинит 1-го рода [$\operatorname{cl} \mathscr{E}_n(E') \leqslant \leqslant 1 + \beta_n$, если α трансфинит 2-го рода].

Ч. Т. Д.

Примечание. Если $\mathscr{E}_n = \text{él}\,(\alpha + \beta_n)$, то

$$\mathscr{E}_n \leqslant \text{él}\,(2 + \beta_n)(E') \quad [\mathscr{E}_n \leqslant \text{él}\,(1 + \beta_n)(E')],$$

так как последняя операция перехода к пределу сводится к операции пересечения убывающей последовательности множеств.

Заметим для дальнейшего, что если каждое образующее элемента E разбить на счетное число слагаемых таким образом, чтобы при этом сохранилась непустота цепей, то класс и вид относительно E содержащегося в нем множества $\mathscr{E}$ не увеличивается. Для доказательства достаточно заметить, что при этом всякая порция множества E переходит в множество нулевого класса, и следовательно множество нулевого класса в прежней образующей системе — в множество нулевого класса в новой образующей системе.

ТЕОРЕМА. *Если E множество измеримое B, заданное решетом C, соответствующим некоторой его образующей системе, то всякое измеримое B множество $\mathscr{E}$, содержащееся в E, может быть определено решетом $\overline{C}$, подчиненным C.*

Теорему, очевидно, достаточно доказать для случая $E = \text{él}$.

Мы уже видели выше, что теорема верна, если $\mathscr{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E)$. Дальше мы проведем доказательство индукцией. При этом очевидно, что нам достаточно рассмотреть элементы относительно E, так как если $\text{cl}\, \mathscr{E}(E) = \alpha$, то $\mathscr{E}$ можно рассматривать как элемент класса $\alpha + 1$ относительно E.

Предположим, что теорема верна для числа α, именно, мы предполагаем, что каждое образующее $E'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ всякого элемента $E' = \text{él}\, \alpha(E)$ можно разбить на счетное число слагаемых, классы которых относительно E не больше, чем $\text{cl}\, E'_{n_1 n_2 \ldots n_k}(E)$, так что решето, соответствующее этой новой образующей системе множества E', подчинено решету C. Покажем, что тогда то же самое имеет место для $\mathscr{E} = \text{él}\,(\alpha + 1)(E)$. Пусть $\mathscr{E} = \text{él}\,(\alpha + 1)(E)$, $\alpha \geqslant 3$.

Множество $\mathscr{E}$ можно всегда покрыть множеством $E' = \text{él}\, \alpha(\mathscr{E})$, так как в силу того, что $\text{cl}\, \mathscr{E}(E) \geqslant 3$, дополнение к $\mathscr{E}$ относительно E несчетно, и поэтому, выбросив из E множество $\text{Inf}\, \alpha(E)$*, содержащееся в $E - \mathscr{E}$, мы получим искомое E'.

В силу примечания к лемме V образующую систему для E' можно преобразовать так, что $\mathscr{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E')$. Разбивая каждое образующее множества E' на счетное число слагаемых, мы построим для него решето C', подчиненное решету C. Как мы заметили, при таком преобразовании образующей системы множества E' класс и вид содержащегося в нем множества $\mathscr{E}$ не повышаются; поэтому и для новой образующей системы множества E' имеем $\mathscr{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E')$. Но мы видели выше, что, разбивая каждое образующее множества $F_{\sigma\delta}(E')$ на счетное число множеств $F(E')$, мы можем преобразовать его образующую систему так, что соответствующее ей решето $\overline{C}$, определяющее $\mathscr{E}$, подчинено решету C', определяющему E' (см. стр. 227). Но решето C' подчинено решету C, следовательно и решето $\overline{C}$, определяющее $\mathscr{E}$, подчинено решету C, определяющему E.

Пусть теперь α трансфинит 2-го рода и теорема верна для всякого числа $\beta < \alpha$. Покажем, что она верна и для α. Пусть $\mathscr{E} = \text{él}\, \alpha(E)$. Тогда $\mathscr{E}$ может быть получено как пересечение убывающей последовательности элементов $\mathscr{E}_n$ классов $\alpha_n < \alpha$ относительно E.

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_2 \cdots \mathscr{E}_n \cdots;$$

$$\mathscr{E}_{n-1} \supset \mathscr{E}_n; \quad \mathscr{E}_n = \text{él}\, \alpha_n(E)\ ^{**}; \quad \alpha_n < \alpha_{n+1} < \alpha.$$

$\alpha_n < \alpha_{n+1}$, поэтому можно положить $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$, $\beta_n \leqslant \alpha_{n+1}$. В силу примечания к лемме V образующую систему для $\mathscr{E}_1$ можно преобразовать так, что

$$\mathscr{E}_n \leqslant \text{él}\,(2 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1})(\mathscr{E}_1) \leqslant \text{él}\, \alpha_n(\mathscr{E}_1) \quad (n > 1),$$

* $\text{Inf}\, \alpha$ — множество класса α, которое является суммой счетного числа множеств классов $< \alpha$.

** Если $\mathscr{E}_n$ не является элементом, то его можно рассматривать как элемент более высокого класса.

так как можно предположить, что $\alpha_1 \geqslant 2$. Вообще, после того как образующая система множества $\mathcal{E}_{n-1}$ преобразована, можно преобразовать образующую систему для $\mathcal{E}_n$ так, чтобы иметь $\mathcal{E}_{n+p} \leqslant \text{él}\, \alpha_{n+p}(\mathcal{E}_n)$. Таким образом мы последовательно преобразуем образующие системы всех множеств $\mathcal{E}_n$ так, что $\mathcal{E}_n \leqslant \text{él}\, \alpha_n(\mathcal{E}_{n-1})$. По предположению теорема верна для всех $\alpha_n < \alpha$, так что $\mathcal{E}_n$ может быть определено решетом C_n, подчиненным решету C_{n-1}, определяющему $\mathcal{E}_{n-1}$. А тогда в силу леммы II множество $\mathcal{E}$ может быть определено решетом $\overline{C}$, подчиненным решету C, определяющему E.

ЛЕММА VI. *Если E какой-то элемент, $\widetilde{\text{Ind}}\, E = \omega^\varphi$, $\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(E_\Delta)}(E - E_\Delta) < \omega^\varphi$, а $\mathcal{E} = \text{él}\ \alpha\ (E)$, то образующую систему для $\mathcal{E}$ можно преобразовать, разбивая каждый ее элемент на счетное число слагаемых так, чтобы $\widetilde{\text{Ind}}\, \mathcal{E} \leqslant \omega^{\varphi+\alpha}$ и $\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_\Delta)}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_\Delta) < \omega^{\varphi+\alpha}$, причем решето, определяющее $\mathcal{E}$, подчинено решету, определяющему E.*

Для случая $\alpha \leqslant 3$ доказательство нашей леммы тождественно доказательству леммы IIIа; только благодаря тому, что мы откинули условие леммы IIIа $\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(E)}\, E_\Delta < \omega^{\varphi'}$, $\varphi' < \varphi$, $x_i(\mathcal{E}) \not\subset \mathcal{E}_\Delta$, имеем в силу (3)

$$\widetilde{\text{Ind}}_x\, \mathcal{E} \leqslant \omega^\varphi(k+1) < \omega^{\varphi+1} \quad (x \subset \mathcal{E}_{ck} - \mathcal{E}_{ck+1}). \tag{11}$$

Аналогично доказательство для внутренней точки множества $\mathcal{E}_1$.

Пусть наше утверждение верно для какого-нибудь α; покажем, что оно остается верным и для $\alpha+1$. Пусть $\mathcal{E} = \text{él}\,(\alpha+1)(E)$, $\alpha \geqslant 3$. В силу примечания к лемме V существует $E' = \text{él}\,\alpha(E)$ такое, что $\mathcal{E} \subset E'$ и $\mathcal{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E')$. Разбивая каждый элемент образующей системы для множества E' на счетное число слагаемых, мы преобразуем ее так, что $\widetilde{\text{Ind}}\, E' \leqslant \omega^{\varphi+\alpha}$ и соответствующее решето подчинено решету C, определяющему E. При этом, как мы видели выше, условие $\mathcal{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E')$ сохраняется и потому в силу (11), разбивая каждое образующее множества $\mathcal{E}$ на счетное число слагаемых, мы можем получить $\widetilde{\text{Ind}}\, \mathcal{E} \leqslant \omega^{\varphi+\alpha+1}$. Легко видеть, что решето, определяющее $\mathcal{E}$, подчинено C.

Пусть теперь α трансфинит 2-го рода и наше утверждение верно для всех чисел $\beta < \alpha$. Покажем, что тогда оно остается верным и для α. Всякое трансфинитное число 2-го рода может быть представлено в следующем виде:

$$\alpha = \omega^{\gamma^{(1)}} + \omega^{\gamma^{(2)}} + \ldots + \omega^{\gamma^{(k)}} + \omega^\gamma,$$
$$\gamma^{(1)} \geqslant \gamma^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant \gamma^{(k)} \geqslant \gamma \geqslant 1.$$

Пусть $\mathcal{E} = \text{él}\,\alpha(E)$. Если сумма, определяющая α, содержит больше одного слагаемого, то мы покроем $\mathcal{E}$ содержащимся в E элементом E':

$$E' = \text{él}\,\beta(E),$$
$$\beta = \omega^{\gamma^{(1)}} + \omega^{\gamma^{(2)}} + \ldots + \omega^{\gamma^{(k)}}.$$

В силу леммы V образующую систему элемента E' можно преобразовать так, что $\mathcal{E} \leqslant \text{él}\,\omega^\gamma(E')$; в силу того что $\beta < \alpha$, можно предполо-

жить, что $\widetilde{\mathrm{Ind}}\, E' \leqslant \omega^{\varphi+\beta}$, и решето, определяющее E', подчинено C, а так как $\omega^\gamma < \alpha$, то элементы образующей системы для $\mathscr{E}$ можно разбить на слагаемые таким образом, что

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{(\varphi+\beta)+\omega^\gamma} = \omega^{\varphi+\alpha}$$

и решето, определяющее $\mathscr{E}$, подчинено C.

Поэтому для доказательства леммы нам остается разобрать случай $\alpha = \omega^\gamma$.

Пусть $\mathscr{E} = \mathrm{él}\, \omega^\gamma(E)$ и наше утверждение верно для всех чисел $\beta < \omega^\gamma$. В этом случае $\mathscr{E}$ является пересечением убывающей последовательности элементов классов $< \omega^\gamma$ относительно E

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_2 \cdot \ldots \cdot \mathscr{E}_n \cdot \ldots,$$
$$\mathscr{E}_n \supset \mathscr{E}_{n+1}, \quad \mathscr{E}_n = \mathrm{él}\, \alpha_n(E), \ \ \alpha_n < \alpha_{n+1} < \omega^\gamma.$$

Как мы видели при доказательстве предыдущей теоремы, образующие системы множеств $\mathscr{E}_n$ можно последовательно преобразовать так, что $\mathscr{E}_n \leqslant \mathrm{él}\, \alpha_n(\mathscr{E}_{n-1})$, и решето C_n, определяющее $\mathscr{E}_n$, подчинено решету C_{n-1}, определяющему $\mathscr{E}_{n-1}$. Если при этом $\sum \mathscr{E}_{n_1}^n$ сумма всех образующих 1-го ранга для $\mathscr{E}_n$, то $\{\mathscr{E}_{n_1}^n \cdot \mathscr{E}_n\}$ представляет собой образующую систему для $\mathscr{E}$, которой в силу построения, указанного в лемме II, соответствует решето $\overline{C}$, определяющее $\mathscr{E}$. Разберем два случая:

1. γ число первого рода. В этом случае можно предположить, что $\alpha_n = \omega^{\gamma-1} m_n$, $(m_n < m_{n+1})$, и так как по предположению лемма верна для всех чисел $\beta < \alpha$, то образующие всех $\mathscr{E}_n$ можно последовательно разбить так, что

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E}_1 \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1} m_1},$$

затем

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E}_2 \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1} m_1+\omega^{\gamma-1} m_2}$$

и вообще последовательно найдем:

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E}_n \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1} m_1+\omega^{\gamma-1} m_2+\ldots+\omega^{\gamma-1} m_n},$$

или, положив $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M_n$,

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E}_n \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1} M_n},$$

причем решето, определяющее $\mathscr{E}_n$, подчинено решету, определяющему $\mathscr{E}_{n-1}$.

Множество $\mathscr{E}$ может быть определено решетом $\overline{C}$, подчиненным решету C, определяющему E, в силу леммы II. Поэтому в силу леммы I для всякой точки $x_e(E)$, внешней для E, имеем:

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_e(E)}\, \overline{C} < \omega^\varphi. \tag{12}$$

Пусть $x \subset E - \mathcal{E}_1$. Часть решета $\overline{C}$, заключенная в каком-то прямоугольнике $\triangle_{n_1}$ первого ранга, $\overline{C}_{\triangle_{n_1}}$ подчинена части решета C_1, заключенной в том же прямоугольнике, — $C_{1\triangle_{n_1}}$. Поэтому

$$\text{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_{n_1}} \leqslant \text{Ind}_x C_{1\triangle_{n_1}} < \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1}M_1},$$

так как $x \not\subset E_1$. Суммируя по всем прямоугольникам 1-го ранга, получим

$$\text{Ind}_x \overline{C} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \text{Ind}\, \overline{C}_{\triangle_{n_1}} \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1}M_1} < \omega^{\varphi+\omega^{\gamma}} \quad (x \subset E - \mathcal{E}_1). \qquad (13)$$

Пусть теперь $x \subset \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k+1}$. Тогда существует прямоугольник $\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ решета $\overline{C}$, который соответствует прямоугольнику решета C_k, содержащему цепь, определяющую точку x. При оценке индекса части решета $\overline{C}$, заключенной в $\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, имеем, очевидно, случай, аналогичный предыдущему, и потому

$$\text{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_k}} \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1}M_{k+1}}.$$

Пусть теперь $\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_s i}$, $s < k$, $i \neq n_{s+1}$, прямоугольник решета $\overline{C}$. Решето $\overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_s i}}$ подчинено решету $C_{(s+1)\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_s i}}$, и потому

$$\text{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_s i}} < \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1}M_{s+1}}.$$

Применяя теперь формулу (3), находим:

$$\text{Ind}_x \overline{C} \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1}M_{k+1}} + \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1}M_k} + \ldots + \omega^{\varphi+\omega^{\gamma-1}M_1} < \omega^{\varphi+\omega^{\gamma}}. \qquad (14)$$

Из (12), (13) и (14) следует:

$$\text{Ind}\, \mathcal{E} \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma}}.$$

Выбрасывая так же, как при доказательстве леммы IIIa, из формулы (3) слагаемое $\text{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_k}}$, находим для точки x_i, внутренней для $\mathcal{E}$,

$$\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_\triangle)} (\mathcal{E} - \mathcal{E}_\triangle) < \omega^{\varphi+\omega^{\gamma}}.$$

2. γ число второго рода. В этом случае можно предположить, что $\alpha_n = \omega^{\gamma_n}$, $\gamma_n < \gamma_{n+1} < \gamma$, и так как по предположению лемма верна для всех $\gamma_n < \gamma$, то образующие системы элементов $\mathcal{E}_n$ можно последовательно преобразовать, разбивая каждое образующее на счетное число слагаемых, так что

$$\widetilde{\text{Ind}}\, \mathcal{E}_1 < \omega^{\varphi+\gamma_1}$$

и вообще

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E}_n \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma_1}+\omega^{\gamma_2}+\ldots+\omega^{\gamma_n}} = \omega^{\varphi+\omega^{\gamma_n}},$$

так как $\gamma_k < \gamma_n$, если $k < n$, и решето C_n подчинено решету C_{n-1}. Множество $\mathscr{E}$ определяется решетом $\overline{C}$, подчиненным решету C; рассуждая совершенно так же, как для случая 1, найдем:

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_e(E)}\, \mathscr{E} < \omega^{\varphi};$$
$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma_1}} \quad (x \subset E - \mathscr{E}_1);$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_x\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma_{n+1}}} + \omega^{\varphi+\omega^{\gamma_n}} + \ldots + \omega^{\varphi+\omega^{\gamma_1}} < \omega^{\varphi+\omega^{\gamma}} \quad (x \subset \mathscr{E}_n - \mathscr{E}_{n+1}).$$

Отсюда

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\varphi+\omega^{\gamma}};$$

таким же образом находим для внутренней точки x_i множества $\mathscr{E}$

$$\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_\Delta)}\, (\mathscr{E} - \mathscr{E}_\Delta) < \omega^{\varphi+\omega^{\gamma}}$$

ч. т. д.

Мы можем теперь дать точное определение индексов множеств измеримых B, т. е. индексов минимальных решет, определяющих эти множества. Обозначая класс множеств измеримых B класса α через K_α, множества достижимые снизу класса α — через $\mathrm{Inf}\,\alpha$ и множества недостижимые класса σ — через $\mathrm{Inac}\,\alpha$, мы получаем следующую таблицу *:

$\alpha \geqslant 1$	$K_{2\alpha}$	él	$\mathrm{Ind} = \omega^\alpha$
		Inf	$\mathrm{Ind} = \omega^\alpha + 1$
		Inac	$\mathrm{Ind} = \omega^\alpha + 1$
	$K_{2\alpha+1}$	él	$\mathrm{Ind} = \omega^\alpha \cdot 2$
		Inf	$\mathrm{Ind} = \omega^\alpha + 1$
		Inac	$\omega^\alpha \cdot 2 \leqslant \mathrm{Ind} \leqslant \omega^{\alpha+1}$.

Покажем прежде всего, что индексы элементов не превышают чисел, указанных в таблице, т. е.

$$\mathrm{Ind}\,(\text{él}\, 2\alpha) \leqslant \omega^\alpha, \tag{15a}$$

$$\mathrm{Ind}\,(\text{él}\,(2\alpha+1)) \leqslant \omega^\alpha \cdot 2. \tag{15b}$$

Положим для доказательства $\alpha = \alpha^* + n$, где α^* — наибольшее число 2-го рода, меньшее или равное α или 0. Тогда

* Обозначения Н. Н. Лузина, см. (1). $\mathrm{Inf}\,\alpha$ — сумма множеств классов $< \alpha$, $\mathrm{Inac}\,\alpha$ — множество класса α, которое не является ни $\text{él}\,\alpha$, ни $\mathrm{Inf}\,\alpha$. Классификация Бэра—де ля Валле-Пуссена.

$$2\alpha=\alpha^*+2n \quad \text{и} \quad 2\alpha+1=\alpha^*+2n+1,$$
$$n\geqslant 0, \text{ если } \alpha^*\neq 0, \text{ и } n\geqslant 1, \text{ если } \alpha^*=0.$$

Если α число 2-го рода, $\alpha=\alpha^*$, то наше предложение непосредственно следует из леммы VI. Достаточно положить $\varphi=1$ и $E\equiv J_x$.

Пусть теперь $\mathcal{E}=\text{él}\,(\alpha^*+1)$. Тогда покроем $\mathcal{E}$ множеством $E=\text{él}\ \alpha^*$. Образующие множества E можно разбить на слагаемые таким образом, что $\mathcal{E}=G_\delta(E)$. Далее, в силу леммы VI образующие множества E можно разбить на слагаемые так, что

$$\widetilde{\text{Ind}}\,E\leqslant\omega^{\alpha^*} \quad \text{и} \quad \widetilde{\text{Ind}}_{x_i(E_\Delta)}(E-E_\Delta)<\omega^{\alpha^*}.$$

Полученное таким образом решето для E удовлетворяет условию леммы IV, поэтому $\mathcal{E}$ может быть задано образующей системой таким образом, что

$$\widetilde{\text{Ind}}\,\mathcal{E}\leqslant\omega^{\alpha^*}\cdot 2,$$
$$\widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_\Delta)}(\mathcal{E}-\mathcal{E}_\Delta)<\omega^{\alpha^*}.$$

Итак, разбив каждое образующее множества él (α^*+1) на счетное число слагаемых, его образующую систему можно преобразовать так, что $\widetilde{\text{Ind}}\,\mathcal{E}\leqslant\omega^{\alpha^*}\cdot 2$ и решето, его определяющее, удовлетворяет условиям леммы IIIb.

Пусть $\mathcal{E}=\text{él}\,(\alpha^*+2)$. Из предыдущего следует, что его можно покрыть элементом $E=\text{él}\,(\alpha^*+1)$ таким, что $\mathcal{E}\leqslant F_{\sigma\delta}(E)$ и определяющее его решето удовлетворяет условиям леммы IIIb. Следовательно, разбивая элементы образующей системы множества $\mathcal{E}$ на слагаемые, ее можно преобразовать так, что $\widetilde{\text{Ind}}\,\mathcal{E}\leqslant\omega^{\alpha^*+1}$ и решето, определяющее $\mathcal{E}$, удовлетворяет условиям леммы IIIa.

Пусть теперь $\mathcal{E}\leqslant G_\delta=\text{él}\,2$ $(\alpha^*=0)$. Легко видеть, что для произвольной правильной образующей системы множества $\mathcal{E}$ имеем

$$\widetilde{\text{Ind}}\,\mathcal{E}=\omega, \qquad \widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_\Delta)}(\mathcal{E}-\mathcal{E}_\Delta)<\omega$$
$$\text{и } \widetilde{\text{Ind}}_{x_i(\mathcal{E})}\mathcal{E}_\Delta=0, \text{ если } x_i\not\subset\mathcal{E}_\Delta.$$

Следовательно, в этом случае удовлетворяется равенство (15a) и решето, определяющее $\mathcal{E}$, удовлетворяет условиям леммы IIIa.

Итак, неравенство (15a) удовлетворяется при любом α^* и при $n=1$, и для соответствующего решета удовлетворяются условия леммы IIIa. Покажем теперь, что *если неравенство* (15a) *удовлетворяется для некоторого* n, *причем соответствующее решето удовлетворяет условиям леммы* IIIa, *то для этого* n *удовлетворяется и неравенство* (15b), *а для* $n+1$ *удовлетворяется неравенство* (15a), *причем соответственные решета удовлетворяют условию лемм соответственно* IIIb *и* IIIa.

Пусть

$$\mathcal{E}=\text{él}\,(\alpha^*+2n+1) \quad (n\geqslant 1).$$

Покроем $\mathscr{E}$ множеством $E = \text{él}\,(\alpha^* + 2n)$ и преобразуем его образующую систему так, чтобы имело место $\mathscr{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E)$. В силу нашего предположения, образующие множества E можно разбить на слагаемые так, чтобы для соответствующего решета $\widetilde{\text{Ind}}\, E < \omega^{\alpha^*+n}$ и само решето удовлетворяло условиям леммы IIIa. Но тогда в силу этой леммы образующие множества $\mathscr{E}$ можно так разбить на слагаемые, чтобы $\widetilde{\text{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\alpha^*+n} \cdot 2 = \omega^{\alpha} \cdot 2$ и соответствующее решето удовлетворяло условиям леммы IIIb.

Пусть теперь

$$\mathscr{E} = \text{él}\,[\alpha^* + 2(n+1)] = \text{él}\,2(\alpha + 1)$$

и E покрывающий его $\text{él}\,(\alpha^* + 2n + 1)$, заданный такой образующей системой, что $\mathscr{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E)$. В силу предыдущего образующую систему множества E можно преобразовать так, чтобы $\widetilde{\text{Ind}}\, E \leqslant \omega^{\alpha^*+n} \cdot 2$ и соответствующее решето удовлетворяло условию леммы IIIb. А тогда в силу этой леммы образующие множества $\mathscr{E}$ можно разбить на слагаемые так, чтобы

$$\widetilde{\text{Ind}}\, \mathscr{E} \leqslant \omega^{\alpha^*+n+1} = \omega^{\alpha+1}$$

и соответствующее решето удовлетворяло условиям леммы IIIa. А так как, как мы видели, неравенство (15a) и условия леммы IIIa удовлетворяются при $n = 1$, то неравенства (15a) и (15b) и соответственно условия лемм IIIa и IIIb удовлетворяются для любого n. Тем самым мы доказали неравенства (15a) и (15b) для любого случая.

Нам остается теперь показать, что индексы, указанные в приведенной таблице, являются точными индексами минимальных решет, определяющих множества измеримые B. Для этого нам придется использовать доказанное нами четвертое неравенство Серпинского для действительных конституант ([2]). Напомним это неравенство.

Пусть σ_α сумма всех действительных конституант некоторого элементарного решета с индексами, меньшими α,

$$\sigma_\alpha = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \dots + \mathscr{E}_\omega + \dots + \mathscr{E}_\beta + \dots \quad | \alpha.$$

Тогда четвертое неравенство в зависимости от вида числа α может быть записано в следующих трех формах:

$$\textbf{a}\ \ \sigma_{\omega^\alpha} \leqslant \text{Inf}\,2\alpha; \qquad \textbf{b}\ \ \sigma_{\omega^\alpha+\beta} \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1); \quad \beta < \omega^\alpha$$

$$\textbf{c}\ \ \sigma_{\omega^\alpha n+\beta} \leqslant \text{Inac}\,(2\alpha+1) \quad n \geqslant 1,\ \beta < \omega^\alpha.$$

Перейдем теперь к доказательству равенств, записанных в таблице. Рассмотрим ряд случаев.

1. $E = \text{él}\,2\alpha$. В силу неравенства (15a) в этом случае $\text{Ind}\, E \leqslant \omega^\alpha$. Предположим, что $\text{Ind}\, E = \beta < \omega^\alpha$. Тогда все конституанты решета, определяющего E, имеют индекс меньший, чем β, и потому, если CE

дополнение к E, то $CE=\sigma_\beta$. В случае, когда α число 1-го рода, имеем в силу неравенства c:

$$CE \leqslant \text{Inac}\,(2\alpha-1),$$

а в случае, когда α число 2-го рода, в силу неравенства a:

$$CE \leqslant \text{Inf}\,2\alpha' \quad (\alpha' < \alpha).$$

Оба эти неравенства противоречат условию $CE=\text{Inf}\,2\alpha$. Итак, предположение $\beta < \omega^\alpha$ приводит к противоречию и потому

$$\text{Ind}\,E=\omega^\alpha.$$

2. $E=\text{él}\,(2\alpha+1)$. В силу неравенства (15b) в этом случае $\text{Ind}\,E \leqslant \omega^\alpha\cdot 2$. Предположим, что $\text{Ind}\,E=\beta<\omega^\alpha\cdot 2$.

$CE=\sigma_\beta$ и в силу неравенства b имеем $CE \leqslant \text{él}\,(2\alpha+1)$, что невозможно, так как по условию $CE=\text{Inf}\,(2\alpha+1)$. Поэтому

$$\text{Ind}\,E=\omega^\alpha\cdot 2.$$

3. $E=\text{Inf}\,2\alpha$, $E=\text{Inac}\,2\alpha$, $E=\text{Inf}\,(2\alpha+1)$. В каждом из указанных случаев E является суммой счетного числа элементов $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$, и чтобы получить решето C, определяющее E, достаточно квадрат со сторонами, равными 1, разбить на счетное число горизонтальных полос, скопляющихся к верхней стороне, и в полосе номера n поместить решето C_n, определяющее E_n. В случае $E=\text{Inf}\,2\alpha$ имеем $E_n \leqslant \text{él}\,(2\alpha-1)$, если α число 1-го рода, и $E_n=\text{él}\,\alpha_n$, $\alpha_n<\alpha$, если α число 2-го рода. В случае $E=\text{Inac}\,2\alpha$ и в случае $E=\text{Inf}\,(2\alpha+1)$ имеем $E_n \leqslant \text{él}\,2\alpha$, и так как $\text{Ind}_x C=\sum_{n=1}^{\infty}\text{Ind}_x C_n$, то в силу 1) и 2) имеем $\text{Ind}_x C \leqslant \omega^\alpha$ и, следовательно,

$$\text{Ind}\,E \leqslant \omega^\alpha+1.$$

Покажем, что этот индекс не может быть понижен. Предположим противное: пусть $\text{Ind}\,E=\beta \leqslant \omega^\alpha$. Тогда $CE=\sigma_\beta$ и в силу условия $\beta \leqslant \omega^\alpha$ и неравенства a имеем $CE \leqslant \text{Inf}\,2\alpha$, что в силу предположений, сделанных относительно E, невозможно. Следовательно, во всех трех случаях

$$\text{Ind}\,E=\omega^\alpha+1.$$

4. $E=\text{Inac}\,(2\alpha+1)$. E можно рассматривать как элемент класса $2(\alpha+1)$ и потому в силу неравенства (15a) имеем $\text{Ind}\,E \leqslant \omega^{\alpha+1}$. Рассуждая совершенно так же, как в случае 2), можно показать, что $\text{Ind}\,E$ не меньше, чем $\omega^\alpha\cdot 2$, так что

$$\omega^\alpha\cdot 2 \leqslant \text{Ind}\,E \leqslant \omega^{\alpha+1}.$$

Существуют как множества $\text{Inac}\,(2\alpha+1)$ с индексом, равным $\omega^\alpha\cdot 2$, так и множества $\text{Inac}\,(2\alpha+1)$ с индексом, равным $\omega^{\alpha+1}$. Чтобы полу-

чить множество $\mathrm{Inac}(2\alpha+1)$ с индексом, равным $\omega^{\alpha}\cdot 2$, достаточно положить в интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $\mathrm{él}(2\alpha+1)$, а в интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ $\mathrm{Inf}(2\alpha+1)$. Совершенно так же, как мы это делали раньше для случая $\alpha^{*}=0$, можно показать, что существуют множества $\mathrm{Inac}(2\alpha+1)$ с индексом, равным $\omega^{\alpha+1}$ (3).

В заключение покажем, что данные нами ранее (2) верхние оценки классов действительных конституант дополнения к A-множеству являются точными. Заметим для этого, что для конституанты $\mathcal{E}_{\gamma}$ с индексом γ имеем

$$\mathcal{E}_{\gamma}=\sigma_{\gamma+1}-\sigma_{\gamma},$$

и разберем возможные случаи.

1. $\gamma=\omega^{\alpha}$. Тогда возьмем множество $E=\mathrm{Inf}(2\alpha+1)$ и рассмотрим минимальное решето C, его определяющее. В силу доказанного выше $\mathrm{Ind}\, C=\omega^{\alpha}+1$, поэтому

$$CE=\sigma_{\omega^{\alpha}+1}=\sigma_{\omega^{\alpha}}+\mathcal{E}_{\omega^{\alpha}}.$$

И так как $CE=\mathrm{él}(2\alpha+1)$, а в силу неравенства а $\sigma_{\omega^{\alpha}}\leqslant \mathrm{Inf}\, 2\alpha$, то имеем необходимо

$$\mathcal{E}_{\omega^{\alpha}}=\mathrm{él}\,(2\alpha+1).$$

2. $\gamma=\omega^{\alpha}\cdot n+\beta$, $\beta<\omega^{\alpha}$. Возьмем множество $E=\mathrm{Inac}(2\alpha+1)$ высокого подкласса ($\mathrm{scl}\, E\geqslant\omega^{2}$) и определяющее его минимальное решето C. Тогда $\mathrm{Ind}\, C=\omega^{\alpha+1}$, $CE=\sigma_{\omega^{\alpha+1}}=\sigma_{\omega^{\alpha}+1}+\sum\mathcal{E}_{\omega^{\alpha}n+\beta}$. Так как E, а следовательно и CE, множество достаточно высокого подкласса, не могущее быть суммой конечного числа изолированных множеств класса $(2\alpha+1)$, то, каково бы ни было n, в сумме $\sum\mathcal{E}_{\omega^{\alpha}n+\beta}$ должно быть бесконечно много слагаемых не более низких, чем $\mathrm{él}(2\alpha+1)$, и в силу данной нами ранее оценки (2) для бесконечного множества значений n и некоторых β имеем

$$\mathrm{él}\,(2\alpha+1)\leqslant\mathcal{E}_{\omega^{\alpha}n+\beta}\leqslant\mathrm{Isol}\,(2\alpha+1)\ *.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
20. I. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1 Lusin N., Sur les classes des constituantes de complémentaire analytique, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 1933.

2 Келдыш Л. В., Верхние оценки для классов действительных конституант аналитического дополнения, Известия Акад. Наук СССР, Матем. серия, **2**, 1937.

3 Келдыш Л. В., Счетные измеримые B решета, определяющие множества измеримые B. Ibid., **3**, 1937.

4 Келдыш Л. В., Об одном свойстве решет измеримых B, Ibid., **1**, 1938.

* $\mathrm{Isol}\,\alpha$ — сумма счетного числа изолированных элементов класса α. Оценку см. (2).

LUDMILA KELDYCH. SUR LA STRUCTURE DES CRIBLES MINIMA POUR LES ENSEMBLES MESURABLES B

RÉSUMÉ

Nous étudions les cribles C rectangulaires ordonnés * et nous désignons par $\mathrm{Ind}_x C$ l'indice au point x du crible linéaire correspondant à C et par $\mathrm{Ind}\, C$ le plus petit nombre transfini surpassant tous les $\mathrm{Ind}_x C$, quel que soit le point x extérieur à l'ensemble E défini au moyen de C.

Etant donné un crible rectangulaire C nous dirons que le crible $\overline{C}$ lui est subordonné, si $\overline{C}$ est formé de rectangles qu'on obtient de ceux du crible C (serrés peut être suivant la direction de l'axe OY) en les déplaçant arbitrairement suivant la direction positive de l'axe OY sans toutefois leur permettre d'entrer dans des rectangles dont ils ne fai. aient pas partie dans le crible C.

Nous démontrons les lemmes suivants:

LEMME I. *Un crible ordonné $\overline{C}$ subordonné au crible C définit un ensemble $\mathcal{E}$ contenu dans l'ensemble E défini au moyen de C, et quel que soit le point x extérieur à E on a* $\mathrm{Ind}_x \overline{C} \leqslant \mathrm{Ind}_x C$, *si* $\mathrm{Ind}_x C = \omega^\alpha$, *et* $\mathrm{Ind}_x \overline{C} \leqslant (\mathrm{Ind}_x C) \cdot m$, *si* $\mathrm{Ind}_x C = \omega^\alpha \cdot n + \beta$.

La première partie de cet énoncé est presque evidente,—et on fait la démonstration de la seconde partie par récurrence.

LEMME II. *Soit* $\mathcal{E} = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n \supset \mathcal{E}_{n+1}$, *où* $\mathcal{E}_n$ *est défini au moyen d'un crible* C_n *subordonné à* C_{n-1}. *Alors, l'ensemble* $\mathcal{E}$ *peut être défini au moyen d'un crible* $\overline{C}$ *subordonné à* C_0.

Nous pouvons toujours supposer que les rectangles de rang 1 du crible C_n sont de rang $\geqslant 2$ pour le crible C_{n-1}. Par définition, les rectangles du crible $\overline{C}$ de rang 1 sont les rectangles de rang 1 de C_1 et les rectangles de $\overline{C}$ de rang k subordonnés à un rectangle $\triangle_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$ de rang $k—1$ sont les rectangles de rang 1 de C_k qui sont subordonnés à $\triangle_{n_1 \ldots n_{k-1}}$ dans le crible C_{k-1}.

Nous considérons maintenant un ensemble E mesurable B, $\mathrm{cl}\, E = \alpha$, donc $E = \sum E_n$, $E_n = \mathrm{él}\, \alpha$, et nous supposons que E est défini au moyen d'un système générateur $\{E^{(n)}_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$, $E = \sum_n \prod_k \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} E^{(n)}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ de manière que chaque chaîne de ce système contient un point et un seul ([4]). Nous disons dans ce cas que le système générateur de E est régulier. Donc, E peut être défini au moyen d'un crible ordonné peigné tel que les projections de ses peignes dans J_x coïncident avec les ensembles $E^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

* Un crible rectangulaire est appelé ordonné, si les projections sur l'axe OY des côtés superieurs des rectangles de rang 1 et celles des rectangles de rang k subordonnés à un même rectangle de rang $k-1$ forment une suite simple ascendente de points.

En remplaçant chaque peigne par le moindre rectangle qui le contient nous obtenons un crible rectangulaire définissant E. Nous appelons ce crible correspondant au système générateur donné de E. Nous considerons dans la suite seulement les cribles correspondants aux systèmes générateurs réguliers de E et nous démontrons, que quel que soit E parmi ces cribles il existent des cribles minima *.

Nous désignons par $\tilde{\operatorname{Ind}}_x E$ l'indice au point x du crible C correspondant à un système régulier $\{E^n_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ fixe et par $\tilde{\operatorname{Ind}} E$, l'indice du crible C. Si x est un point extérieur à E et intérieur [extérieur] à un ensemble E', nous désignons l'indice du crible C au point x par $\tilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(E')} E$, $(\tilde{\operatorname{Ind}}_{x_e(E')} E)$.

Nous considérons un élément E mesurable B défini au moyen du crible C correspondant à un système générateur régulier, et nous montrons, que si un ensemble $\mathscr{E} \subset E$ est au plus un élément de classe 3 par rapport à E (4), $\mathscr{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E)$, en décomposant chaque élément du système générateur de $\mathscr{E}$ en une somme dénombrable d'ensembles $F(E)$ on peut déformer ce système de manière, que le crible correspondant $\overline{C}$ soit subordonné à C. Il suffit pour cela de décomposer l'ensemble $F_\sigma(E)$ en une somme de $F_n(E)$ de manière que $F_{n+1}(E)$ soit situé dans une seule α-portion $E \cdot E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de E ne contenant aucun point de $F_1(E) + F_2(E) + \dots + F_n(E)$.

Nous désignons la partie du crible C contenue dans l'un de ses rectangles par $C_\triangle$ et la partie correspondante de E par $E_\triangle$, et nous démontrons les lemmes suivants,—en posant $\alpha = \alpha^* + n$, α^* étant le plus grand nombre de seconde espèce inférieur ou égal à α ou 0:

LEMME IIIa. *Soit* $\mathscr{E} = F_{\sigma\delta}(E)$, $\alpha = \alpha^* + n$, $n \geqslant 1$, *et* $\tilde{\operatorname{Ind}} E \leqslant \omega^\alpha$, $\tilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(E_\triangle)}(E - E_\triangle) < \omega^\alpha$ *et* $\tilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(E)} E_\triangle < \omega^{\alpha-1}$, *si* $x_i(E) \not\subset E_\triangle$.

En décomposant chaque ensemble générateur de $\mathscr{E}$ *en une infinité dénombrable au plus d'ensembles* $\mathscr{E}_{n_1 n_2 \dots n_k} = F(E)$, *nous pouvons obtenir* $\operatorname{Ind} \mathscr{E} \leqslant \omega^\alpha \cdot 2$ *et* $\tilde{\operatorname{Ind}}_{x_i(\mathscr{E}_\triangle)}(\mathscr{E} - \mathscr{E}_\triangle) < \omega^\alpha$.

Pour démontrer ce lemme nous utilisons le lemme I et nous désignons par $\overline{C}$ le crible correspondant au système générateur nouveau de $\mathscr{E}$, par $\triangle_{n_1 n_2 \dots n_k}$ le rectangle de ce crible correspondant à $\mathscr{E}_{n_1 n_2 \dots n_k}$ tel que $x \subset \mathscr{E}_{n_1 n_2 \dots n_k} - \mathscr{E}_{ck+1}$, et nous remarquons que le crible $\overline{C}_{\triangle_{m_1 m_2 \dots m_s}}$ est subordonné au crible $C_{m_1 m_2 \dots m_s}$ définissant $\mathscr{E}_{m_1 m_2 \dots m_s}$; puis nous démontrons que $\operatorname{Ind} \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \dots n_s i}} < \omega^\alpha$, si l'on a $s < k$, $i < n_{s+1}$, et $\operatorname{Ind} \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \dots n_s i}} < \omega^{\alpha-1}$, si l'on a $s < k$, $i > n_{s+1}$, et que $\operatorname{Ind} \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \dots n_k}} \leqslant \omega^\alpha$, et nous utilisons la formule

$$\tilde{\operatorname{Ind}}_x \mathscr{E} = \sum_{i<n_1} \operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_i} + \sum_{i<n_2} \operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_{n_1 i}} + \dots + \sum_{i<n_k} \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} i}} + $$
$$+ \operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \dots n_k}} + \sum_{i>n_k} \operatorname{Ind}_x \overline{C}_{\triangle_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} i}} + \dots + \sum_{i>n_1} \overline{C}_{\triangle_i}. \qquad (1)$$

* On appelle un crible C définissant E crible minimum, si quel que soit le crible C' définissant E on a $\operatorname{Ind} C \leqslant \operatorname{Ind} C'$.

LEMME IIIb. *Soit* $\mathcal{E}=F_{\sigma\delta}(E)$ *et* $\widetilde{\mathrm{Ind}}\,E \leqslant \omega^{\alpha}\cdot 2$, $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(E_{\Delta})}(E-E_{\Delta}) < \omega^{\alpha}$; *en décomposant chaque ensemble générateur de* $\mathcal{E}$ *en une somme dénombrable au plus d'ensembles* $\mathcal{E}'_{n_1 n_2 \ldots n_k}=F(E)$ *nous pouvons obtenir*: $\widetilde{\mathrm{Ind}}\,\mathcal{E} \leqslant \omega^{\alpha+1}$, $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_{\Delta})}(\mathcal{E}-\mathcal{E}_{\Delta}) < \omega^{\alpha+1}$ *et* $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(\mathcal{E})}\,\mathcal{E}_{\Delta} < \omega^{\alpha}$, *si* $x_i(\mathcal{E}) \not\subset \mathcal{E}_{\Delta}$.

LEMME IV. *Soit* α *un nombre transfini de seconde espèce*, $\widetilde{\mathrm{Ind}}\,E \leqslant \omega^{\alpha}$, $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(E_{\Delta})}(E-E_{\Delta}) < \omega^{\alpha}$ *et* $\mathcal{E}=G_{\delta}(E)$; *il existe alors un système générateur régulier de* $\mathcal{E}$ *tel que* $\widetilde{\mathrm{Ind}}\,\mathcal{E} \leqslant \omega^{\alpha}\cdot 2$ *et* $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_{\Delta})}(\mathcal{E}-\mathcal{E}_{\Delta}) < \omega^{\alpha}$.

Les démonstrations des lemmes IIIb et IV sont tout à fait analogues à celle du lemme IIIa.

LEMME V. *Soit* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ *une infinité dénombrable d'ensembles* $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_n(E)=\alpha+\beta_n$, $\alpha \geqslant 2$ *et* E' *un* $\mathrm{él}\,\alpha(E)$ *contenant tous les* $\mathcal{E}_n$; *on peut déformer le système générateur de* E' *de manière à avoir*: $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_n(E') \leqslant 2+\beta_n$, *si* α *est un nombre de première espèce, et* $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}_n(E') \leqslant 1+\beta_n$, *si* α *est un nombre de seconde espèce.*

L'énoncé de ce lemme suit du fait, qu'étant donnée une infinité dénombrable d'énsembles $\{e_k^n\}$, $e_k^n=\mathrm{él}\,\alpha'(E)$, $\alpha' < \alpha-1$ $[\alpha' < \alpha]$, on peut déformer le système générateur de E' de manière que $\mathrm{cl}\,e_k^n\cdot E'(E')=0$. La démonstration pour le cas général est identique à celle pour le cas $E \equiv J_x$*.

Remarque. Si l'on a $\mathcal{E}_n=\mathrm{él}(\alpha+\beta_n)(E)$ on peut déformer le système générateur de E' de manière que $\mathcal{E}_n \leqslant \mathrm{él}\,(2+\beta_n)(E')$ $[\mathcal{E}_k \leqslant \mathrm{él}\,(1+\beta_n)(E')]$.

THÉORÈME. *Si* E *est un ensemble mesurable* B *criblé au moyen d'un crible* C *correspondant à un système générateur régulier de* E, *chaque ensemble* $\mathcal{E}$ *mesurable* B *contenu dans* E *peut être défini au moyen d'un crible* $\bar{C}$ *subordonné à* C.

Remarquons que si $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}(E)=\alpha$, on peut considerer $\mathcal{E}$ comme un $\mathrm{él}\,(\alpha+1)(E)$, et qu'il suffit de considerer le cas $E=\mathrm{él}\,\beta$, $\mathcal{E}=\mathrm{él}\,\alpha(E)$.

On obtient la démonstration de ce théorème par récurrence transfinie. Si $\mathcal{E}=\mathrm{él}\,(\alpha+1)(E)$, nous enfermons $\mathcal{E}$ dans un élément $E'=\mathrm{él}\,\alpha(E)$ tel que $\mathcal{E}=F_{\sigma\delta}(E')$. Si α est un nombre de seconde espèce on a $\mathcal{E}=\prod_{n=1}^{\infty}\mathcal{E}_n$. $\mathcal{E}_n \supset \mathcal{E}_{n+1}$.

D'après le lemme V nous pouvons déformer successivement le système générateur de $\mathcal{E}_n$ de manière que $\mathcal{E}_{n+1} \leqslant \mathrm{él}\,\alpha_{n+1}(\mathcal{E}_n)$, et en supposant que le théorème est vrai pour tous les $\alpha_n < \alpha$ et en utilisant le lemme II nous démontrons que le théorème est vrai pour α lui même.

LEMME VI. *Soit* E *un élément mesurable* B, $\widetilde{\mathrm{Ind}}\,E \leqslant \omega^{\rho}$, $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(E_{\Delta})}(E-E_{\Delta}) < \omega^{\rho}$ *et* $\mathcal{E}=\mathrm{él}\,\alpha(E)$; *alors en décomposant chaque ensemble générateur de* $\mathcal{E}$ *en une infinité dénombrable d'ensembles au plus on peut déformer le système générateur de* $\mathcal{E}$ *de manière que* $\widetilde{\mathrm{Ind}}\,\mathcal{E} \leqslant \omega^{\rho+\alpha}$, $\widetilde{\mathrm{Ind}}_{x_i(\mathcal{E}_{\Delta})}(\mathcal{E}-\mathcal{E}_{\Delta}) < \omega^{\rho+\alpha}$.

Pour le cas $\alpha \leqslant 3$ la démonstration est tout à fait identique à celle

* Voir (4).

du lemme IIIa. Ensuite on obtient par récurrence la démonstration du cas général. Si $\mathcal{E} = \text{él}\,(\alpha+1)\,(E)$ on enferme $\mathcal{E}$ dans un ensemble $E' = \text{él}\,\alpha\,(E)$ tel que $\mathcal{E} \leqslant F_{\sigma\delta}(E')$. Si $\mathcal{E} = \text{él}\,\alpha\,(E)$, $\alpha = \omega^{\gamma^{(1)}} + \omega^{\gamma^{(2)}} + \ldots + \omega^{\gamma^{(k)}} + \omega^{\gamma}$, $\gamma^{(1)} \geqslant \gamma^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant \gamma \geqslant 1$, on enferme $\mathcal{E}$ dans un ensemble $E' = \text{él}\,(\omega^{\gamma^{(1)}} + \ldots + \omega^{\gamma^{(k)}})$. Si, enfin, $\mathcal{E} = \text{él}\,\omega^{\gamma}(E)$, on a $\mathcal{E} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n = \text{él}\,\alpha_n(E)$, $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \omega^{\gamma}$. Dans ce cas on déforme successivement le système générateur de chaque $\mathcal{E}_n$ de la même manière que dans le théorème précedent, et on remarque que le crible $\overline{C}$ définissant $\mathcal{E}$ correspond au système générateur de $\mathcal{E}$, $\left\{\mathcal{E}_{n_1}^{n} \cdot \mathcal{E}_n\right\}$, $\mathcal{E}_{n_1}^{n}$ étant un ensemble générateur de rang 1 pour $\mathcal{E}_n$, et on considère deux cas: 1) $\gamma - 1$ existe et 2) γ est un nombre de seconde espèce. Ensuite, pour calculer l'indice de $\overline{C}$ au point x dans chacun de ces cas on utilise, comme dans les cas des lemmes IIIa, IIIb et IV, la formule (1).

Maintenant nous pouvons définir les indices réels des ensembles mesurables B,—Ind E,—cela veut dire, les indices réels des cribles minima définissants ces ensembles. Ces indices sont donnés dans le tableau suivant, si l'on designe la classe des ensembles mesurables B de classe α par K_{α}, un ensemble de classe α accessible inférieurement

$$\left(E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n,\ \text{cl}\,E_n < \alpha\right)$$

par Inf α et un ensemble inaccessible par Inac α *:

$$1 \leqslant \alpha \qquad \begin{array}{ll} K_{2\alpha} \left\{ \begin{array}{ll} \text{él} & \text{Ind} = \omega^{\alpha} \\ \text{Inf} & \text{Ind} = \omega^{\alpha} + 1 \\ \text{Inac} & \text{Ind} = \omega^{\alpha} + 1 \end{array} \right. \\ \\ K_{2\alpha+1} \left\{ \begin{array}{ll} \text{él} & \text{Ind} = \omega^{\alpha} \cdot 2 \\ \text{Inf} & \text{Ind} = \omega^{\alpha} + 1 \\ \text{Inac} & \omega^{\alpha} \cdot 2 \leqslant \text{Ind} \leqslant \omega^{\alpha+1} \end{array} \right. \end{array}$$

On considère le crible définissant un ensemble $\mathcal{E} \leqslant G_{\delta}$ $(\alpha \leqslant 2)$, puis en utilisant les lemmes IIIa, IIIb, IV et VI on démontre par récurrence que, si E est un élément, son indice ne dépasse pas l'indice correspondant donné dans le tableau. Connaissant les bornes supérieures des indices pour tous les éléments mesurables B on définit sans difficulté les bornes superieures des indices pour des ensembles mesurables B quelconques. Enfin, en utilisant l'inégalité 4 de Sierpinski ([2]) on démontre, que ces bornes sont les indices exactes des ensembles mesurables B. On considère à cet effet 4 cas:

1. $E = \text{él}\,2\alpha$. Donc $CE = \text{Inf}\,2\alpha$.

* Ce sont les notations de N. Lusin. Voir ([1]).

Mais $CE = \sigma_\beta$ est la somme de toutes les constituantes extérieures du crible définissant E. En supposant que $\beta < \omega^\alpha$ et en utilisant l'inégalité 4c de Sierpinski on obtient une contradiction.

2. $E = \text{él}\,(2\alpha + 1)$.

3. $E = \text{Inf}\,2\alpha$, $E = \text{Inac}\,2\alpha$ et $E = \text{Inf}\,(2\alpha + 1)$.

4. $E = \text{Inac}\,(2\alpha + 1)$.

La démonstration dans les cas 2, 3 et 4 est tout à fait analogue à celle du cas 1. Dans le quatrième cas tous les indices du tableau sont effectivement atteintes.

En conclusion nous démontrons, que les bornes supérieures pour les lasses des constituantes que nous avons donné dans ([2]) sont exactes.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ ПРИЛИВОВ В БАССЕЙНАХ ПОСТОЯННОЙ ГЛУБИНЫ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье рассматривается та же задача, что и в предыдущей работе автора [6], но здесь применяется другой метод. Именно, дифференциальное уравнение теории приливов приводится к интегральному и строится ядро последнего по методу, основанному на применении комплексной функции Грина, введенной С. Г. Михлиным. Затем исследуются некоторые свойства ядра и рассматривается вопрос о разложении собственных значений и собственных функций интегрального уравнения по степеням параметра, пропорционального угловой скорости вращения бассейна.

§ 1

Уравнения движения несжимаемой жидкости, заключенной в бассейне постоянной глубины, вращающемся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, при обычных предположениях [(6), (2)] могут быть написаны в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g}$, Ω—потенциал приливообразующей силы, ζ—возвышение уровня жидкости над плоскостью XOY, u, v — составляющие скорости частицы жидкости по осям OX, OY, вращающимся вокруг вертикальной оси OZ с угловой скоростью ω; наконец, h — постоянная глубина бассейна, g — ускорение силы тяжести.

Мы будем рассматривать свободные колебания жидкости, т. е. колебания, которые имели бы место при $\bar{\zeta}=0$. Свободные колебания представляют интерес для резонансной теории приливов, по которой волны, частоты которых близки к частотам $\bar{\zeta}$, могут иметь большие амплитуды и давать значительный эффект.

Предположим, что u, v и ζ зависят от времени следующим образом:

$$u = \operatorname{Re} Ue^{i\sigma t},\ v = \operatorname{Re} Ve^{i\sigma t},\ \zeta = \operatorname{Re} Ze^{i\sigma t}, \tag{2}$$

(Re — вещественная часть функции), где σ — постоянная частота колебаний, U, V, Z — комплексные функции координат x, y.

Подставим выражения (2) в уравнения (1), причем знак Re не будем писать. Получим:

$$\left.\begin{aligned} i\sigma U - 2\omega V &= -g\frac{\partial Z}{\partial x}, \\ i\sigma V + 2\omega U &= -g\frac{\partial Z}{\partial y}, \\ i\sigma Z &= -h\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из первых двух уравнений (3) найдем U и V (при $\sigma^2 - 4\omega^2 \neq 0$) и подставим их в последнее из уравнений (3); получим уравнение для Z:

$$\Delta Z + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh} Z = 0 \quad \left(\Delta Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right). \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{gh}}, \quad \varepsilon = \frac{2\omega}{\sqrt{gh}}. \tag{5}$$

Тогда уравнение для Z перепишется так:

$$\Delta Z + (\lambda^2 - \varepsilon^2) Z = 0. \tag{6}$$

На контуре L, ограничивающем область S, занятую жидкостью, мы должны иметь

$$v_n = 0$$

(v_n — нормальная составляющая скорости), что приводит к такому соотношению:

$$i\sigma \frac{\partial Z}{\partial n} + 2\omega \frac{\partial Z}{\partial s} = 0 \text{ на } L$$

$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right.$ — производная по внешней нормали, $\left.\frac{\partial}{\partial s} \text{ — по дуге}\right)$.

Пользуясь обозначениями (5), это условие перепишем так:

$$i\lambda \frac{\partial Z}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial Z}{\partial s} = 0 \text{ на } L. \tag{7}$$

Наша основная задача может теперь быть сформулирована следующим образом:

Найти отличные от нуля решения уравнения Гельмгольца (6) при контурном условии (7).

В следующем параграфе мы покажем, как эта задача сводится к интегральному уравнению. В заключение этого параграфа рассмотрим отдельно оставленные нами в стороне значения σ:

1. $\sigma = 0$. Тогда и $\lambda = 0$. В этом случае мы принимаем, что u, v и ζ не зависят от t, и, следовательно, U, V, Z совпадают с u, v и ζ. Вместо уравнений (3) имеем:

$$-2\omega V = -g\frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$2\omega U = -g\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Видим, что всякая функция $Z(x, y)$, для которой $\frac{\partial Z}{\partial s}=0$ на контуре, дает решение задачи.

В этом случае уравнение (6) при условии (7) неэквивалентно уравнениям (3), так как из (6) получается

$$\Delta Z - \varepsilon^2 Z = 0 \text{ в } S,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial s} = 0 \text{ на } L.$$

Дело в том, что, подставляя U и V из двух первых уравнений (3) в третье, получим:

$$i\sigma Z = -\frac{ghi\sigma}{\sigma^2 - 4\omega^2}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right).$$

При $\sigma = 0$ имеем тождество, из которого не вытекает уравнение (6).

2. $\sigma = \pm 2\omega$. Уравнения (3) дают систему:

$$U + iV = \frac{gi}{\pm 2\omega}\frac{\partial Z}{\partial x},$$
$$U + iV = \frac{g}{\mp 2\omega}\frac{\partial Z}{\partial y},$$

что возможно лишь при

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \pm i\frac{\partial Z}{\partial y},$$

т. е. когда Z (а, следовательно, и $U+iV$) есть функция соответственно от $z = x+iy$ или $\bar{z} = x-iy$. Произвольная функция комплексного переменного z (или $\bar{z}$) дает решение задачи.

Г. Бертран [2] исследовал эти критические значения частоты $\sigma = \pm 2\omega$ и пришел к заключению, что они не соответствуют физической реальности, а появляются в результате принятия ряда гипотез, приводящих к упрощению задачи.

§ 2. Приведение уравнения Гельмгольца к интегральному уравнению

Рассмотрим три задачи, отличающиеся характером контурных условий.

Задача 1. Дано уравнение

$$\Delta U + \lambda U = 0 \tag{8}$$

в области S.

Ищется решение его, обращающееся в нуль на контуре области

$$U = 0 \text{ на } L.$$

Точку $P(x, y)$ области S обведем окружностью L_0 радиуса δ и применим формулу Грина к области $S-\eta$, ограниченной контурами L и L_0, и к функциям $U(\xi, \eta)$ и $G(x, y; \xi, \eta)$, где (ξ, η) — координаты любой точки M области S:

$$\iint\limits_{S-\eta}(U\Delta G - G\Delta U)\,dS = \int\limits_L\left(U\frac{dG}{dn} - G\frac{dU}{dn}\right)ds - \int\limits_{L_0}\left(U\frac{dG}{dn} - G\frac{dU}{dn}\right)ds$$

(ds — элемент дуги контура).

Пусть $G(x, y; \xi, \eta)$ есть функция Грина области S, т. е.

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \lg \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + g(x, y; \xi, \eta),$$

где $g(x, y; \xi, \eta)$ — гармоническая функция в области S, причем $G=0$ на контуре (когда точка $M(\xi, \eta)$ приходит на контур). Тогда интеграл по L будет равен нулю, а

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{L_0} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = -U(x, y).$$

Так как во всех точках области S, кроме $M = P$,

$$\Delta G = 0,$$
$$\Delta U = -\lambda U,$$

то получим интегральное уравнение для U:

$$U(x, y) = \lambda \iint_S G(x, y; \xi, \eta) U(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta. \tag{9}$$

Известно, что $G(x, y; \xi, \eta)$ симметрично относительно своих аргументов, т. е., что $G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$. Известно, что уравнение (9) имеет бесчисленное множество собственных значений λ_k, причем все $\lambda_k > 0$, так что G — положительное ядро.

Задача 2. Требуется, чтобы на контуре L нормальная производная функции U обращалась в нуль:

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L. \tag{10}$$

Этому условию удовлетворяет частная задача о приливах, именно приливах в неподвижном бассейне, когда $\omega = 0$, а, следовательно, и $\varepsilon = 0$.

Непосредственно видно, что $\lambda = 0$ есть характеристическое число уравнения (8), причем соответствующая ему фундаментальная функция есть постоянная. Положим $U = \frac{1}{\sqrt{S}}$, где S — величина площади, ограниченной контуром L. Для составления интегрального уравнения будем искать обобщенную функцию Грина-Неймана $N(x, y; \xi, \eta)$, т. е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta N = \frac{1}{S} \tag{11}$$

при условии

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L.$$

Функция N может быть представлена в виде

$$N(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \lg \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + K(x, y; \xi, \eta) + K_0.$$

где $K(x, y; \xi, \eta)$ — гармоническая функция в области S, K_0 — частное решение неоднородного уравнения (11). Можно взять

$$K_0 = \frac{x^2 + y^2}{4S}.$$

Заменив в формуле Грина предыдущей задачи функцию G на N, аналогичными рассуждениями придем к уравнению

$$\iint_S (U\Delta N - N\Delta U)\, d\xi\, d\eta = U(x, y),$$

или на основании (8) и (11)

$$U(x, y) = \lambda \iint_S N(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{S} \iint_S U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (12)$$

Это и есть искомое интегральное уравнение. При $\lambda \neq 0$ имеем, на основании (8), применяя формулу Гаусса-Остроградского:

$$\iint_S U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\frac{1}{\lambda} \iint_S \Delta U\, d\xi\, d\eta = -\frac{1}{\lambda} \int_L \frac{\partial U}{\partial n}\, ds = 0.$$

Поэтому (12) можно переписать, для $\lambda \neq 0$:

$$U(x, y) = \lambda \iint_S N(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (13)$$

Функция Неймана, как известно, также является положительным ядром.

Задача 3. Ищется решение уравнения

$$\Delta U + (\lambda^2 - \varepsilon^2)\, U = 0 \qquad (14)$$

при условии:

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial n} = i\varepsilon \frac{\partial U}{\partial s} \text{ на контуре.} \qquad (15)$$

Чтобы получить соответствующее задаче интегральное уравнение, ищем обобщенную функцию Грина $H(x, y; \xi, \eta)$, являющуюся решением уравнения

$$\Delta H = \frac{1}{S},$$

причем

$$\lambda \frac{\partial H}{\partial \nu} + i\varepsilon \frac{\partial H}{\partial \sigma} = 0 \text{ на контуре,}$$

где σ — длина дуги $\left(\frac{\partial}{\partial \nu} \text{ и } \frac{\partial}{\partial \sigma} \text{ относятся к координатам } \xi, \eta \text{ точки } M\right)$.

$H(x, y; \xi, \eta)$ должна иметь вид:

$$H(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \lg \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + h(x, y; \xi, \eta) + h_0,$$

где h — гармоническая функция в области S, h_0 — частное решение неоднородного уравнения для H; например, можно положить

$$h_0 = \frac{x^2 + y^2}{4S}.$$

Если такая функция H найдена, то применение формулы Грина (см. задачу 1) дает

$$\iint\limits_S (U\Delta H - H\Delta U)\, dS = -\frac{i\varepsilon}{\lambda}\int\limits_L \left(U\frac{\partial H}{\partial s} + H\frac{\partial U}{\partial s}\right) d\sigma + U(x, y).$$

При условии однозначности функций H и U контурный интеграл равен нулю, и мы получим (при $\lambda \neq 0$)

$$U(x, y) = (\lambda^2 - \varepsilon^2)\iint\limits_S H(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, dS + \frac{1}{S}\iint\limits_S U(\xi, \eta)\, dS. \qquad (16)$$

При $\lambda^2 - \varepsilon^2 \neq 0$ последний интеграл равен нулю, так как

$$\iint\limits_S U(\xi, \eta)\, dS = \frac{1}{\lambda^2 - \varepsilon^2}\iint\limits_S \Delta U\, dS = \frac{1}{\lambda^2 - \varepsilon^2}\int\limits_L \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

и мы можем написать интегральное уравнение (16) следующим образом:

$$U(x, y) = (\lambda^2 - \varepsilon^2)\iint\limits_S H(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, dS. \qquad (17)$$

Можно несколько иначе привести уравнение Гельмгольца к интегральному уравнению (4).

Известно, что решение уравнения Пуассона

$$\Delta U = f(x, y)$$

может быть написано в виде

$$U = -\iint\limits_S f(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, dS,$$

где G — функция Грина:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r} + g(x, y; \xi, \eta)$$

и где гармоническая в области S функция выбирается в соответствии с условиями на контуре.

Тогда для уравнения

$$\Delta U + \lambda U = 0$$

будем иметь интегральное уравнение

$$U(x, y) = \lambda\iint\limits_S U(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, dS.$$

Для первой задачи, когда $\varphi = 0$ на контуре, нужно потребовать, чтобы

$$G(P; \xi, \eta) = 0,$$

когда точка P приходит на контур. Вследствие симметричности функции Грина первой задачи это есть та самая функция Грина, которая фигу-

рирует в уравнении (9). Для второй задачи, где нужно, чтобы $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ на контуре (буквой n обозначено дифференцирование по нормали, относящееся к переменным (x, y)), положим

$$G = N_1(P, M),$$

причем потребуем, чтобы $\frac{\partial N_1}{\partial n} = 0$, когда P совпадает с точкой контура, и чтобы

$$\Delta_P N_1 = \frac{1}{S} \text{ внутри } S.$$

Интегральное уравнение будет иметь вид:

$$U(x, y) = \lambda \iint_S N_1(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, dS + \frac{1}{S} \iint_S U(\xi, \eta)\, dS.$$

Функция Неймана определяется с точностью до постоянного слагаемого. Его можно выбрать так, чтобы функции $N(x, y; \xi, \eta)$ и $N_1(x, y; \xi, \eta)$ совпали.

Для решения третьей задачи рассмотрим функцию Грина $H_1(x, y; \xi, \eta)$ и потребуем, чтобы

$$\lambda \frac{\partial H_1}{\partial n} = i\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial s} \text{ на контуре}$$

(при этом точка P совпадает с точкой контура) и

$$\Delta_P H_1 = \frac{1}{S} \text{ внутри области } S.$$

Интегральное уравнение будет:

$$U(x, y) = (\lambda^2 - \varepsilon^2) \iint_S H_1(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, dS + \frac{1}{S} \iint_S U(\xi, \eta)\, dS.$$

Эти две функции можно выбрать так, что они будут равны между собой:

$$H_1(x, y; \xi, \eta) = H(x, y; \xi, \eta).$$

Для доказательства рассмотрим функции от (x, y)

$$H(\xi, \eta; x, y) \quad \text{и} \quad H_1(x, y; \xi', \eta'),$$

где $M(\xi, \eta)$ и $M'(\xi', \eta')$ — две различные заданные точки области. Применим к нашим функциям формулу Грина:

$$\iint_S (H \Delta_P H_1 - H_1 \Delta_P H)\, dS = \int_L \left(H \frac{\partial H_1}{\partial n} - H_1 \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds + \int_{l} \left(H \frac{\partial H_1}{\partial n} - H_1 \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds + \int_{l_1} \left(H \frac{\partial H_1}{\partial n} - H_1 \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds,$$

где L_0, L_1 — окружности радиусов ε_0 и ε_1 с центрами в точках M и M', δ_0 и δ_1 — площади соответствующих кругов. Интеграл по контуру L равен нулю в силу граничных условий для H и H_1. Далее,

$$\lim_{\varepsilon_0 \to 0} \int_{L_0} \left(H \frac{\partial H_1}{\partial n} - H_1 \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds = H_1(\xi, \eta; \xi', \eta'),$$

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{L_1} \left(H \frac{\partial H_1}{\partial n} - H_1 \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds = H(\xi, \eta; \xi', \eta').$$

Поэтому имеем

$$\frac{1}{S} \iint_S (H - H_1)\, dS = H(\xi, \eta; \xi', \eta') - H_1(\xi, \eta; \xi', \eta'),$$

или

$$H(\xi, \eta; \xi', \eta') - \frac{1}{S} \iint_S H(\xi, \eta; x, y)\, dS =$$
$$= H_1(\xi, \eta; \xi', \eta') - \frac{1}{S} \iint_S H_1(x, y; \xi', \eta')\, dS.$$

Если мы вместо функций $H(\xi, \eta; \xi', \eta')$ и $H_1(\xi, \eta; \xi', \eta')$ введем функции

$$H(\xi, \eta; \xi', \eta') - \frac{1}{S} \iint_S H(\xi, \eta; x, y)\, dS$$

и

$$H_1(\xi, \eta; \xi', \eta') - \frac{1}{S} \iint_S H_1(x, y; \xi', \eta')\, dS$$

или, иначе, если поставим условия, что интегралы по площади S от наших функций по переменным x, y должны равняться нулю, то получим при этом новом определении функций Грина:

$$H(\xi, \eta; \xi', \eta') = H_1(\xi, \eta; \xi', \eta').$$

Заметим, что Пуанкаре рассматривает собственно не функцию H_1, а функцию, которую мы обозначили через $H_{11}(x, y; \xi, \eta)$ и требует, чтобы $H_{11}(x, y)$ была гармонической функцией в области, т. е. чтобы

$$\Delta_P H_{11} = 0,$$

но зато граничное условие для нее неоднородно:

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial n} = C \frac{\partial H_{11}}{\partial s} - \frac{1}{l} \text{ на контуре}$$

(l — длина контура).

Интегральное уравнение получается того же вида, что и в предыдущих способах, ядро же его H_{11} несколько отличается от H.

Функция Грина и ее обобщения для круга

Известно, что функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ для круга радиуса R с центром в начале координат может быть написана в виде:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \lg \left(\left| \frac{z - \zeta}{z - \frac{R^2}{\bar\zeta}} \right| \frac{R}{|\zeta|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \lg \frac{(z - \zeta)(\bar z - \bar\zeta) R^2}{\left(z - \frac{R^2}{\bar\zeta}\right)\left(\bar z - \frac{R^2}{\zeta}\right) \zeta\bar\zeta}.$$

Здесь $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$ суть комплексные координаты точек $P(x,y)$ и $M(\xi,\eta)$. Если перейти к полярным координатам, так что положение точки P будет определяться координатами (r,θ), а точки M — координатами (ρ,α), то найдем:

$$G(x,y;\ \xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\left\{\lg\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}-\right.$$
$$\left.-\lg\sqrt{\frac{r^2\rho^2}{R^2}+R^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}\right\}.$$

Функция Грина-Неймана нашей второй задачи есть

$$N(x,y;\ \xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\lg\left|(z-\zeta)\left(z-\frac{R^2}{\bar\zeta}\right)\right|+\frac{r^2+\rho^2}{4\pi R^2}.$$

Обобщенная функция Грина третьей задачи может быть написана в таком виде:

$$H(x,y;\ \xi,\eta)=-\frac{1}{4\pi}\left\{\lg[(z-\zeta)(\bar z-\bar\zeta)]+\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda-\varepsilon}\lg\left(z-\frac{R^2}{\bar\zeta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda-\varepsilon}{\lambda+\varepsilon}\lg\left(\bar z-\frac{R^2}{\zeta}\right)\right\}+\frac{r^2+\rho^2}{4\pi R^2}.$$

Построение этой функции наметил Пуанкаре [1]. Вычисление приведено Г. Бертраном [2]. Формула для H показывает, что обобщенная функция Грина не существует при $\lambda=\pm\varepsilon$. Однако, исключительность характера этих значений λ для интегрального уравнения пропадает, если принять во внимание, что ядро уравнения умножается на $\lambda^2-\varepsilon^2$.

§ 3. Построение обобщенной функции Грина третьей задачи

Г. Бертраном [2] дано доказательство существования функции $H(x,y;\ \xi,\eta)$ для области, контур которой не имеет угловых точек, причем построение обобщенной функции Грина сводится к решению интегрального уравнения с сингулярным ядром.

Мы даем способ построения функции $H(x,y;\ \xi,\eta)$, основанный на использовании введенной С. Г. Михлиным комплексной функции Грина [3]. При этом оказывается, что для построения функции H достаточно знать лишь функцию Грина первой задачи G или, иными словами, достаточно знать функцию, дающую конформное отображение области S на круг.

Итак, будем решать задачу: для данной области S, ограниченной контуром L, требуется найти функцию H такую, что

$$H=-\frac{1}{2\pi}\lg r+h(x,y;\ \xi,\eta)+h_0(x,y), \tag{18}$$

где $h(x,y)$ — гармоническая в области S функция, h_0 — частное решение уравнения: $\Delta H=\frac{1}{S}$ $\left(\text{мы будем брать } h_0=\frac{x^2+y^2}{4S}\right)$, причем на контуре L имеем:

$$\gamma\frac{\partial H}{\partial n}=i\frac{\partial H}{\partial s}\quad\left(\gamma=\frac{\lambda}{\varepsilon}\right). \tag{19}$$

Контурное условие для h, очевидно, таково:

$$\gamma \frac{\partial h}{\partial n} - i \frac{\partial h}{\partial s} = \gamma \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi} \lg r\right) - i \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2\pi} \lg r\right) - \gamma \frac{\partial h_0}{\partial n} + i \frac{\partial h_0}{\partial s}. \qquad (20)$$

Положим

$$h(x, y) = u + iu_1,$$

где u и u_1 — гармонические в области S, но не сопряженные функции. Пусть будет

$$u + iv = \varphi(z), \quad u_1 + iv_1 = \psi(z);$$

тогда на основании уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + i \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s} + i \frac{\partial v_1}{\partial s},$$

а потому равенство (20) примет вид:

$$\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial s} + i \frac{\partial v_1}{\partial s}\right) - i\left(\frac{\partial u}{\partial s} + i \frac{\partial u_1}{\partial s}\right) = \gamma f_1(s) - i f_2(s), \qquad (21)$$

где

$$f_1(s) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi} \lg r\right) - \frac{\partial h_0}{\partial n},$$

$$f_2(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2\pi} \lg r\right) - \frac{\partial h_0}{\partial s}.$$

По условию, ε принимает лишь вещественные значения. Что касается λ, а, следовательно, и γ, то заранее неизвестно, какие значения они могут принимать, а потому положим

$$\gamma = \alpha + \beta i.$$

Подставим это выражение в равенство (19) и проинтегрируем последнее по дуге s. Тогда можем написать:

$$\alpha v - \beta v_1 - u_1 + i(\beta v + \alpha v_1 + u) = \alpha F_1 + i(\beta F_1 + F_2). \qquad (22)$$

Здесь положено

$$F_1(s) = \int_{s_0}^{s} f_1(\sigma)\, d\sigma, \quad F_2(s) = \int_{s_0}^{s} f_2(\sigma)\, d\sigma.$$

Построим функции комплексного переменного $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, вещественные части которых принимают на контуре значения, соответственно равные $F_1(s)$ и $F_2(s)$, и одна из ветвей мнимых частей которых обращается в нуль при некотором значении $z = a$. Имеем [3]:

$$\Phi_k(z) = \int_L F_k(s)\, T(z; s)\, ds \quad (k = 1, 2),$$

$$T(z; s) = \frac{\partial M(z; s)}{\partial \nu} \quad (\nu \text{ — нормаль к контуру}).$$

$$M(z; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) + iG_1(x, y; \xi, \eta),$$

где G — функция Грина данной области (функция Грина нашей первой задачи), G_1 — сопряженная с G функция, $M(z; \xi, \eta)$ — комплексная функция Грина.

Положим

$$\Phi_k(z) = \varphi_k(x, y) + i\psi_k(x, y) \quad (k = 1, 2).$$

Отделение вещественной части от мнимой в равенстве (22), если заменить в нем F_1, F_2 на φ_1 и φ_2, и следовательно, рассматривать u, v, u_1, v_1 внутри S, приводит к уравнениям:

$$\alpha v - \beta v_1 - u_1 = \alpha\varphi_1,$$
$$\beta v + \alpha v_1 + u = \beta\varphi_1 + \varphi_2.$$

Далее, составим два уравнения, сопряженные с только что написанными:

$$-\alpha u + \beta u_1 - v_1 = \alpha\psi_1,$$
$$-\beta u - \alpha u_1 + v = \beta\psi_1 + \psi_2.$$

Исключим из полученных уравнений v и v_1. Тогда для u и u_1 получим такую систему:

$$\alpha(1 - \alpha^2 - \beta^2) u + \beta(1 + \alpha^2 + \beta^2) u_1 = \alpha(\alpha^2 + \beta^2)\psi_1 + \alpha\varphi_2,$$
$$-\beta(1 + \alpha^2 + \beta^2) u + \alpha(1 - \alpha^2 - \beta^2) u_1 =$$
$$= -(\alpha^2 + \beta^2)\varphi_1 + \beta(\alpha^2 + \beta^2)\psi_1 - \beta\varphi_2 + (\alpha^2 + \beta^2)\psi_2.$$

Определитель δ этой системы равен:

$$\delta = \alpha^2(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + \beta^2(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 =$$
$$= \gamma\bar{\gamma}(\gamma^2 - 1)(\bar{\gamma}^2 - 1) \quad (\gamma = \alpha - \beta i).$$

Поэтому будем иметь:

$$\delta(u + iu_1) = (\bar{\gamma}^2 - 1)\gamma\bar{\gamma}[i\gamma(\varphi_1 - \psi_2) - \varphi_2 - \gamma^2\psi_1 + h_0].$$

Наконец,

$$(\gamma^2 - 1)(u + iu_1) = -\gamma^2\psi_1 + i\gamma(\varphi_1 - \psi_2) - \varphi_2$$

и

$$(\gamma^2 - 1) H = \gamma^2\left(\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r} - \psi_1\right) + i\gamma(\varphi_1 - \psi_2) - \left(\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r} + \varphi_2 + h_0\right),$$

или

$$(\lambda^2 - \varepsilon^2) H = \lambda^2\left(\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r} - \psi_1\right) +$$
$$+ i\lambda\varepsilon(\psi_1 - \psi_2) - \varepsilon^2\left(\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r} + \varphi_2 + h_0\right).$$

Отметим прежде всего, что $\bar{\gamma}$ не вошло в окончательное выражение функции H, другими словами, вид функции не зависит от того, является ли γ вещественным или комплексным. Функция H определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Если в последнем равенстве положить $\varepsilon = 0$, то получим функцию Неймана второй задачи. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r} - \psi_1 = N.$$

Коэффициент при ε^2 есть видоизмененная функция Грина первой задачи, а именно:

$$\frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r}+\varphi_2+h_0=G(x,y;\xi,\eta)+\frac{1}{S}\iint_S G(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy.$$

Обозначим коэффициент при $-\varepsilon^2$ через $M(x,y;\xi,\eta)$. Положим

$$\varphi_1-\psi_2=L.$$

Можем равенство для H переписать так:

$$(\lambda^2-\varepsilon^2)H=\lambda^2 N+i\lambda\varepsilon L-\varepsilon^2 M.$$

Составим из N, L и M линейную комбинацию:

$$N-M+iL=i(\varphi_1+i\psi_1)-(\varphi_2+i\psi_2).$$

Так как эта комбинация представляет собою функцию комплексного переменного, то L есть гармоническая функция, сопряженная с разностью $N-M$, также представляющей собою гармоническую функцию в области S.

Окончательно можем теперь представить интегральное уравнение (17) в таком виде:

$$U(x,y)=\iint_S[\lambda^2N(x,y;\xi,\eta)-i\lambda\varepsilon L(x,y;\xi,\eta)-\varepsilon^2M(x,y;\xi,\eta)]\times$$
$$\times U(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{23}$$

Заметим, что изложенный способ построения функции H содержит и способ построения функции Неймана, именно, последняя получается из H, если положить $\varepsilon=0$. Отметим еще, что если бы мы стали искать функцию $H_{11}(x,y;\xi,\eta)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta H_{11}=0$$

в области S при контурном условии

$$\lambda\frac{\partial H_{11}}{\partial n}=i\varepsilon\frac{\partial H_{11}}{\partial s}-\frac{\lambda}{l},$$

где l — длина контура L, то получили бы

$$H_{11}=\lambda^2N_{11}(x,y;\xi,\eta)-i\lambda\varepsilon L_{11}(x,y;\xi,\eta)-\varepsilon^2M_{11}(x,y;\xi,\eta).$$

Здесь N_{11} — функция Неймана, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta N_{11}=0$$

и контурному условию

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial n}=-\frac{1}{l};$$

$M_{11}(x,y;\xi,\eta)=G(x,y;\xi,\eta)$, т. е. M_{11} совпадает с функцией Грина первой задачи и L_{11} — гармоническая функция, сопряженная с разностью $N_{11}-M_{11}$.

§ 4. Свойства функции $H(x,y;\xi,\eta)$

Функция $N(x,y;\xi,\eta)$, определяемая с точностью до постоянного слагаемого, обладает свойством симметрии относительно пар значений

(x, y) и (ξ, η). Функция $M(x, y; \xi, \eta)$ определена с точностью до произвольной функции от ξ, η; последнюю можно подобрать так, чтобы M стала симметричной относительно (x, y) и (ξ, η). Покажем, что

$$L(\xi, \eta; x, y) = -L(x, y; \xi, \eta), \qquad (24)$$

т. е. что L антисимметрична.

Действительно, предполагая λ вещественным, рассмотрим функцию $H(x, y; \xi, \eta)$ как функцию от (x, y), затем как функцию от (ξ, η). Тогда в контурных условиях $i\varepsilon$ входит с разными знаками:

$$\lambda \frac{\partial H}{\partial n} = i\varepsilon \frac{\partial H}{\partial s} \quad \text{и} \quad \lambda \frac{\partial H}{\partial \nu} = -i\varepsilon \frac{\partial H}{\partial \sigma}.$$

Поэтому для H получим, очевидно, такое выражение:

$$(\lambda^2 - \varepsilon^2) H(x, y; \xi, \eta) = \lambda^2 N(\xi, \eta; x, y) + i\lambda\varepsilon L(\xi, \eta; x, y) - \varepsilon^2 M(\xi, \eta; x, y),$$

откуда и вытекает свойство (24).

Отсюда, очевидно, следует, что при вещественных значениях λ ядро $H(x, y; \xi, \eta)$ обладает эрмитовской симметрией:

$$H(\xi, \eta; x, y) = \overline{H(x, y; \xi, \eta)}$$

($\overline{H}$ — сопряженная с H функция).

Покажем теперь, что при вещественных значениях ε все характеристические числа уравнения (23) вещественны. Предположим, что $U_s(x, y)$ есть характеристическая функция уравнения (23), λ_s—соответствующее ей характеристическое число. Нормируем $U_s(x, y)$ так, чтобы

$$\iint_S U_s(x, y)\overline{U_s(x, y)}\, dS = 1.$$

Умножая тождество

$$U_s(x, y) = \iint_S [\lambda_s^2 N - i\lambda_s\varepsilon L - \varepsilon^2 N]\, U_s(\xi, \eta)\, dS$$

почленно на $\overline{U_s(x, y)}\, dS$ и интегрируя по S, получим:

$$1 = A\lambda_s^2 + 2\lambda_s\varepsilon B - \varepsilon^2 C, \qquad (2\ )$$

где

$$A = \iint_S \left(\iint_S N(x, y; \xi, \eta)\, U_s(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right) \overline{U_s(x, y)}\, dx\, dy,$$

$$2B = -i \iint_S \left(\iint_S L(x, y; \xi, \eta)\, U_s(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right) \overline{U_s(x, y)}\, dx\, dy,$$

$$C = \iint_S \left(\iint_S M(x, y; \xi, \eta)\, U_s(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right) \overline{U_s(x, y)}\, dx\, dy.$$

Нетрудно видеть, что A, B, C вещественны, причем A и C всегда положительны, так как функция Неймана и обобщенная функция Грина суть положительные ядра. (Если $U_s(x, y)$ вещественно, то $B = 0$.)

Уравнение (25) дает вещественные значения λ_s:

$$\lambda_s = \frac{-B\varepsilon \pm \sqrt{(B^2 + AC)\,\varepsilon^2 + A}}{A},$$

так как дискриминант уравнения больше нуля. Вместе с тем видим, что λ_s или все время больше нуля или для всех ε $\lambda_s < 0$.

Нетрудно видеть [1], что знаменатель Фредгольма уравнения (23) представляет целую функцию как относительно λ, так и относительно ε. Легко убедиться, что определитель Фредгольма есть функция от λ^2 и ε^2:

$$D = D(\lambda^2, \varepsilon^2).$$

Известно, что при $\varepsilon = 0$ уравнение

$$D(\lambda^2, 0) = 0$$

имеет бесчисленное множество вещественных корней. Обозначим один из этих корней через $\lambda_0^{(s)}$. Тогда, по теореме существования неявной функции, уравнение

$$D(\lambda^2, \varepsilon^2) = 0$$

имеет решение в виде степенного ряда

$$\lambda^{(s)} = \lambda_0^{(s)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon^k,$$

сходящегося при достаточно малых значениях ε.

При этом решение уравнения (23) может быть также разложено по степеням ε:

$$U^{(s)}(x, y) = U_0^{(s)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(s)}(x, y)\, \varepsilon^k.$$

Чтобы посмотреть, что будет, если λ_0 есть кратное характеристическое число, выпишем несколько членов разложения в ряд определителя D. Для этого положим

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \gamma, \quad N - i\gamma L - \gamma^2 M = K.$$

Интегральное уравнение можно тогда записать так:

$$U(x, y) = \lambda^2 \iint\limits_S K(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, dS.$$

Ядро K обращается при $x = \xi$, $y = \eta$ в бесконечность как

$$\lg \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Поэтому при построении $D(\lambda^2)$ можно воспользоваться способом Hadamard'а: при вычислении повторных интегралов заменять нулями диагональные элементы в определителях, от которых берутся интегралы. Поэтому будем иметь:

$$D(\lambda^2) = 1 + \frac{\lambda^4}{2!} \int\int \begin{vmatrix} 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{vmatrix} dS_1 dS_2 -$$

$$- \frac{\lambda^6}{3!} \int\int\int \begin{vmatrix} 0 & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & 0 & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & 0 \end{vmatrix} dS_1 dS_2 dS_3 + \ldots =$$

$$=1+\frac{\lambda^4}{2!}\int\int\begin{vmatrix}0, & N_{12}-i\gamma L_{12}-\gamma^2 M_{12}\\ N_{12}+i\gamma L_{12}-\gamma^2 M_{12}, & 0\end{vmatrix}dS_1 dS_2-$$

$$-\frac{\lambda^6}{3!}\int\int\int\begin{vmatrix}0, & N_{12}-i\gamma L_{12}-\gamma^2 M_{12}, & N_{13}-i\gamma L_{13}-\gamma^2 M_{13}\\ N_{12}+i\gamma L_{12}-\gamma^2 M_{12}, & 0, & N_{23}-i\gamma L_{23}-\gamma^2 M_{23}\\ N_{13}+i\gamma L_{13}-\gamma^2 M_{13}, & N_{23}+i\gamma L_{23}-\gamma^2 M_{23}, & 0\end{vmatrix}dS_1 dS_2 dS_3+\ldots$$

Здесь один знак интеграла обозначает двойной интеграл, символы N_{12}, L_{12} означают:

$$N_{12}=N(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2), \ \ldots$$
$$dS_1=d\xi_1 d\eta_1, \ \ldots$$

При составлении определителей использовано свойство эрмитовской симметрии ядра. Поэтому все подинтегральные функции будут вещественными.

$D(\lambda^2, \varepsilon^2)$ будет иметь вид:

$$D(\lambda^2, \varepsilon^2)=1+D_{40}\lambda^4+D_{22}\lambda^2\varepsilon^2+D_{04}\varepsilon^4+\ldots,$$

где

$$D_{40}=-\frac{1}{2}\int\int\int\int N^2(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2<0,$$
$$D_{04}=-\frac{1}{2}\int\int\int\int M^2(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2<0,$$
$$D_{22}=\frac{1}{2}\int\int\int\int\left[N(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\,M(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)-L^2(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\right]d\xi_1\,d\eta_1\,d\xi_2\,d\eta_2.$$

Если $\lambda=\lambda_0$ есть корень кратности k уравнения

$$D(\lambda^2, 0)=0,$$

то разложение $D(\lambda^2, \varepsilon^2)$ около $\lambda=\lambda_0$, $\varepsilon=0$ имеет вид

$$D(\lambda^2, \varepsilon^2)=A(\lambda-\lambda_0)^k+B\varepsilon^2+C(\lambda-\lambda_0)\varepsilon^2+\ldots,$$

а отсюда следует (см. способ Puiseux, Picard, t. II, p. 394), что $\lambda-\lambda_0$ разлагается в ряд вида

$$\lambda-\lambda_0=\alpha\varepsilon^{\frac{2}{k}}+\ldots,$$

причем α определяется из уравнения

$$A\alpha^k=B.$$

Но разложение не должно содержать дробных степеней, так как иначе $\lambda-\lambda_0$ было бы комплексным, а по доказанному ранее все значения λ (при вещественных ε) вещественны. Следовательно, α, а также ряд других ко ффициентов должны обращаться в нуль.

Таким образом, при достаточно малых значениях характеристические числа и функции могут быть разложены в ряд по целым степеням ε.

§ 5. Функции Грина и Неймана для прямоугольной области

Известна функция Грина для прямоугольника со сторонами a и b ([7]). Именно:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\lg\frac{\sigma(z-\zeta)\sigma(z+\zeta)}{\sigma(z-\bar{\zeta})\sigma(z+\bar{\zeta})}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\lg\frac{\sigma(z-\zeta)\sigma(z+\zeta)\sigma(\bar{z}-\bar{\zeta})\sigma(\bar{z}+\zeta)}{\sigma(z-\bar{\zeta})\sigma(z+\bar{\zeta})\sigma(\bar{z}-\zeta)\sigma(\bar{z}+\zeta)},$$

где $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, $\sigma(z)$—эллиптическая функция, построенная на периодах: $\omega_1=2a$, $\omega_2=2bi$.

Известно также, что функция G разлагается в тригонометрический ряд

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}.$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно в области прямоугольника, за исключением окрестности точки ξ, η. Это разложение представляет собою разложение ядра интегрального уравнения

$$U(x, y) = \lambda\iint\limits_S G(x, y; \xi, \eta)U(\xi, \eta)\,dS$$

по собственным нормированным функциям

$$U_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

ибо известно, что ядро может быть представлено в виде

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m,n}\frac{U_{mn}(x, y)\,U_{mn}(\xi, \eta)}{\lambda_{mn}},$$

если последний ряд сходится равномерно.

Что касается обобщенной функции Неймана для прямоугольника, то нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что она имеет вид:

$$N(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\log[\sigma(z-\zeta)\sigma(z+\zeta)\sigma(z-\bar{\zeta})\sigma(z+\bar{\zeta})] +$$

$$+\frac{\zeta(a)}{\pi a}(x^2+\xi^2)+\frac{i\zeta(bi)}{\pi b}(y^2+\eta^2),$$

где $\zeta(z)$—функция дзета Вейерштрасса $\left(\text{очевидно, что } \Delta N\equiv\frac{1}{ab}\text{; легко проверить, что на сторонах прямоугольника } \frac{\partial N}{\partial n}=0\right)$. Пользуясь разложением $\lg\sigma(z)$ в тригонометрический ряд:

$$\lg\sigma(z) = \frac{\zeta(a)}{a}(z-a-bi)+2\zeta(a)+2\zeta(bi)(z-a-bi)-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos\frac{n\pi}{a}(z-bi)}{n(1-q^{2n})}+2\sum\frac{(-1)^n q^n}{n(1-q^{2n})}+\lg\sigma(a+bi),$$

где $q = e^{-\frac{\pi b}{a}}$, получим следующее разложение функции Неймана в тригонометрический ряд

$$N(x, y; \xi, \eta) = \frac{}{ab\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{m\pi\xi}{a} \cos\frac{n\pi\eta}{b}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} +$$

$$+ \frac{2a}{\pi b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{m\pi\xi}{a}}{m^2} + \frac{2b}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{n\pi\eta}{b}}{n^2},$$

сходящийся абсолютно и равномерно в области прямоугольника, за исключением его вершин и точки $x = \xi$, $y = \eta$.

§ 6. Ряды для малых значений ε

Будем искать собственные функции и собственные числа интегрального уравнения

$$Z(x, y) = \int_S [\lambda^2 N(x, y; \xi, \eta) + i\lambda\varepsilon L(x, y; \xi, \eta) - \\ - \varepsilon^2 M(x, y; \xi, \eta)] Z(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \qquad (26)$$

в виде рядов, расположенных по степеням ε:

$$Z = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \ldots, \qquad (27)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2 + \ldots; \qquad (28)$$

λ_0 и Z_0 — собственное значение и собственная функция для случая, когда $\varepsilon = 0$.

Подставим ряды (27) и (28) в уравнение (26) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим:

$$Z_0 = \lambda_0^2 \int_S N Z_0 \, dS, \qquad (29)$$

$$Z_1 = \lambda_0^2 \int_S N Z_1 \, dS + 2\lambda_0 \lambda_1 \int_S N Z_0 \, dS + i\lambda_0 \int_S L Z_0 \, dS, \qquad (30)$$

$$Z_2 = \lambda_0^2 \int_S N Z_2 \, dS + 2\lambda_0 \lambda_1 \int_S N Z_1 \, dS + 2\lambda_0 \lambda_2 \int_S N Z_0 \, dS - \\ - \int_S M Z_0 \, dS + i\lambda_1 \int_S L Z_0 \, dS + i\lambda_0 \int_S L Z_1 \, dS + \lambda_1^2 \int_S N Z_0 \, dS, \qquad (31)$$

. . . .

Уравнение (29) подтверждает, что Z_0 и λ_0 суть соответственно собственное значение и собственная функция задачи без вращения.

Предположим сначала, что λ_0^2 есть простое характеристическое число. Тогда из (30) найдем, что должно быть

$$\lambda_1 = 0.$$

Действительно, умножим (30) почленно на $Z_0\,dS$ и проинтегрируем по области S. Получим:

$$\int_S Z_1(x, y)\,Z_0(x, y)\,dx\,dy = \lambda_0^2 \int_S\int_S N(x, y; \xi, \eta)\,Z_1(x, y)\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ 2\lambda_0\lambda_1 \int_S\int_S N(x, y; \xi, \eta)\,Z_0(x, y)\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ i\lambda_0 \int_S\int_S L(x, y; \xi, \eta)\,Z_0(x, y)\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta.$$

Вследствие симметричности N имеем:

$$\lambda_0^2 \int_S\int_S N(x, y; \xi, \eta)\,Z_1(x, y)\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \lambda_0^2 \frac{1}{\lambda_0^2} \int_S Z_0(\xi, \eta)\,Z_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = \int_S Z_0 Z_1\,dS.$$

Так как $L(x, y; \xi, \eta) = -L(\xi, \eta; x, y)$, то

$$\int_S\int_S L(x, y; \xi, \eta)\,Z_0(x, y)\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Поэтому получаем

$$0 = 2\lambda_0\lambda_1 \int_S\int_S N(x, y; \xi, \eta)\,Z_0(x, y)\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta.$$

Так как ядро N положительно, то интеграл в правой части этого равенства отличен от нуля, поэтому имеем:

$$\lambda_1 = 0. \tag{32}$$

Что касается Z_1, то его теперь найдем из уравнения

$$Z_1 = \lambda_0^2 \int_S N(x, y; \xi, \eta)\,Z_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + i\lambda_0 F(x, y), \tag{33}$$

где $F(x, y) = \int_S L(x, y; \xi, \eta)\,Z_0(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$

Далее, для вычисления λ_2 умножим (31) на $Z_0\,dS$ и проинтегрируем по S. Получим

$$0 = 2\lambda_0\lambda_2 \int_S\int_S N(x, y; \xi, \eta)\,Z_0(x, y)\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta -$$

$$- \int_S\int_S [M(x, y; \xi, \eta)\,Z_0(x, y) - i\lambda_0 L(x, y; \xi, \eta)\,Z_1(x, y)]\,Z_0(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta, \tag{34}$$

откуда найдем λ_2.

Произведем указанные вычисления для прямоугольного бассейна. Пусть

$$Z_0 = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$\lambda_0^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}.$$

Имеем:

$$M(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{s\pi y}{b} \sin\frac{r\pi\xi}{a} \sin\frac{s\pi\eta}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}} +$$

$$+ \frac{16}{\pi^4} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(2r+1)\frac{\pi x}{a} \sin(2s+1)\frac{\pi y}{b} + \sin(2r+1)\frac{\pi\xi}{a} \sin(2s+1)\frac{\pi\eta}{b}}{(2r+1)(2s+1)\left[\frac{(2r+1)^2}{a^2} + \frac{(2s+1)^2}{b^2}\right]},$$

$$L(x, y; \xi, \eta) =$$

$$= -\frac{4}{a^2\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{r}{s} \frac{\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b} \sin\frac{r\pi\xi}{a} \sin\frac{s\pi\eta}{b} - \sin\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{s\pi y}{b} \cos\frac{r\pi\xi}{a} \cos\frac{s\pi\eta}{b}}{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}} +$$

$$+ \frac{16}{a^2\pi^4} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos(2r+1)\frac{\pi x}{a} \cos(2s+1)\frac{\pi y}{b}}{(2s+1)^2\left[\frac{(2r+1)^2}{a^2} + \frac{(2s+1)^2}{b^2}\right]} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin\frac{r\pi x}{a}}{r} -$$

$$- \frac{4}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \sin\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{s\pi y}{b} \cos\frac{r\pi\xi}{a}}{sr} -$$

$$- \frac{16}{a^2\pi^2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos(2r+1)\frac{\pi\xi}{a} \cos(2s+1)\frac{\pi\eta}{b}}{(2s+1)^2\left[\frac{(2r+1)^2}{a^2} + \frac{(2s+1)^2}{b^2}\right]} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin\frac{r\pi\xi}{a}}{r} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \sin\frac{r\pi\xi}{a} \sin\frac{s\pi\eta}{b} \cos\frac{r\pi x}{a}}{rs}.$$

Вычислим $F(x, y)$:

$$F(x, y) =$$

$$= \int_S LZ_0\, dS = -\frac{32}{ab\sqrt{ab}\,\pi^4} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(r^2n^2 - s^2m^2)\cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}}{(r^2 - m^2)(s^2 - n^2)\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} + C;$$

C—постоянная, не представляющая интереса, так как затем она пропадает при вычислениях.

Чтобы найти Z_1 из уравнения (33), которое теперь принимает вид

$$Z_1 = \lambda_0^2 \int_S NZ_1\, dS + \sum_r \sum_s a_{rs} \cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b} + i\lambda_0 C,$$

где

$$a_{rs} = -\frac{32i}{ab\sqrt{ab}\,\lambda_0\pi^2} \frac{r^2n^2 - s^2m^2}{(r^2 - m^2)(s^2 - n^2)\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)},$$

$$a_{r0} = \varepsilon_1 \frac{16ai}{\lambda_0 b\sqrt{ab}\, n^2} \cdot \frac{1}{r^2 - m^2},$$

$$a_{0s} = \varepsilon_2 \frac{16bi}{\lambda_0 a\sqrt{ab}\, m^2} \cdot \frac{1}{s^2 - n^2},$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } n \text{ нечетном} \\ 0 \text{ при } n \text{ четном} \end{cases} \qquad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } m \text{ нечетном,} \\ 0 \text{ при } m \text{ четном;} \end{cases}$$

положим

$$Z_1 = \sum_r \sum_s A_{rs} \cos\frac{r\pi x}{a} \cos\frac{s\pi y}{b}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$A_{rs} = \frac{\lambda_{rs}^2}{\lambda_{rs}^2 - \lambda_0^2} a_{rs},$$

и, следовательно,

$$Z_1 = -\frac{32i}{ab\sqrt{ab}\,\pi^2\lambda_0} \sum_r \sum_s \frac{(r^2n^2 - s^2m^2)\cos\frac{r\pi x}{a}\cos\frac{s\pi y}{b}}{(r^2-m^2)(s^2-n^2)(\lambda_{rs}^2-\lambda_0^2)} +$$

$$+ \frac{16a\varepsilon_1 i}{\lambda_0 b\sqrt{ab}\,\pi^2} \sum_r \frac{\cos\frac{r\pi x}{a}}{r^2-m^2} - \frac{16b\varepsilon_2 i}{\lambda_0 a\sqrt{ab}\,\pi^2} \sum_s \frac{\cos\frac{s\pi y}{b}}{s^2-n^2}.$$

λ_2, вычисленное по формуле (34), имеет вид:

$$\lambda_2 = -\frac{128}{\pi^2a^2b^2\lambda_0}\left\{ \sum_{r,s} \frac{(r^2n^2-s^2m^2)^2}{(r^2-m^2)^2(s^2-n^2)^2\lambda_{rs}^2\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_1}{2}\sum_r \frac{r^4}{(r^2-m^2)^2\left(\frac{r^2}{a^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)} + \frac{\varepsilon_2}{2}\sum_s \frac{s^4}{(s^2-n^2)^2\left(\frac{s^2}{b^2}-\bar{\lambda}_0^2\right)} \right\},$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } m \text{ нечетном}, \\ 0 \text{ при } m \text{ четном}, \end{cases} \qquad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } n \text{ нечетном}, \\ 0 \text{ при } n \text{ четном} \end{cases}$$

r и s таковы, что $r+m$ и $s+n$ нечетные.

Если λ_0 кратное собственное число, то вычисление Z_1, λ_1 производится аналогично тому, как это указано в статье ([6]). А именно, следует положить

$$Z_0 = A_1Z_0^{(1)} + A_2Z_0^{(2)} + \ldots + A_kZ_0^{(k)},$$

где $Z_0^{(1)}, \ldots, Z_0^{(k)}$ — собственные функции k-кратного числа λ_0. Уравнение (30) нужно умножить почленно на $\overline{Z_0(x, y)}\,dS$.

Так как интеграл

$$\int_S \int_S L(x, y; \xi, \eta) Z_0(\xi, \eta) \overline{Z_0(x, y)}\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta$$

теперь, вообще говоря, не равен нулю, то и λ_1 вообще отлично от нуля. Коэффициенты $A_1, \ldots, A_k$ определяются, вообще говоря (с точностью до множителя $e^{i\alpha}$), из условия ортогональности функции $F(x, y)$ к $Z_0^{(1)}, \ldots, Z_0^{(k)}$. Заметим, что в случае, который рассматривал L. Rayleigh [([4]) и ([5])]:

$$Z_0 = \cos mx,$$

для квадратного бассейна, сторона которого равна π, как раз имеет место двукратное характеристическое число.

В заключение выражаю благодарность С. Г. Михлину за его указания относительно комплексной функции Грина.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
5. VI. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Poincaré H., Théorie des marées.

[2] Bertrand G., La théorie des marées et les équations integrales, Annales de l'école normale, 1923, IV, №№ 5 — 9.

[3] Михлин С. Г., Плоская задача теории упругости, Труды Сейсмологического института Академии Наук СССР, № 65, 1935.

[4] Rayleigh L., On the vibrations of a rectangular sheet of rotating liquid, Phil. Mag., ser. 6, vol. 5, 1903.

[5] Rayleigh L., Notes concerning tidal oscillations upon a rotating globe, Proc. Roy. Soc., ser. A, vol. 82, 1909.

Полубаринова-Кочина П. Я., К задаче о приливах в прямоугольном бассейне, Известия Академии Наук СССР, Матем. серия, № 3, 1937.

[7] Courant R. und Hilbert D., Methoden der mathematischen Physik, I, гл. V.

P. POLOUBARINOVA-KOCHINA. ON THE INTEGRAL EQUATION OF THE THEORY OF TIDES IN RESERVOIRS OF CONSTANT DEPTH

SUMMARY

The problem of normal vibrations (Eigenschwingungen) of a liquid in a reservoir of constant depth can be reduced to the problem of solving the equation (6) under the contour condition (7), or the equation (14) under the contour condition (15). In this paper we look for a generalized Green's function $H(x, y; \xi, \eta)$, which is the solution of the equation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = \frac{1}{S},$$

where S is the area of the reservoir, satisfying on the contour the condition

$$\lambda \frac{\partial H}{\partial \nu} + i\varepsilon \frac{\partial H}{\partial \sigma} = 0.$$

Here $\frac{\partial}{\partial \nu}$ means the derivative along the normal, $\frac{\partial}{\partial \sigma}$ the derivative along the tangent, ε is a given real number and λ the parameter to be determined.

The problem then reduces to the integral equation

$$U(x, y) = (\lambda^2 - \varepsilon^2) \iint_S H(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, dS + \frac{1}{S} \iint_S U(\xi, \eta)\, dS.$$

If $\lambda^2 - \varepsilon^2 \neq 0$, the second term on the right-hand side vanishes. With the help of the complex Green's function introduced by S. Mikhlin (3) the following expression for H is established:

$$(\lambda^2 - \varepsilon^2) H = \lambda^2 N + i\lambda\varepsilon L - \varepsilon^2 M.$$

Here N is Neumann's function, i. e., Green's function satisfying the equation $\Delta N = \frac{1}{S}$ and the contour condition

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} = 0,$$

M is a kind of Green's function, namely

$$M = G(x, y; \xi, \eta) + \frac{1}{S} \iint_S G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy,$$

where G is the usual Green's function vanishing on the contour of S, and finally L is a harmonic function conjugated to the difference $N - M$, which is also a harmonic function in the domain S.

The paper contains a method of finding Neumann's function N in the case that Green's function G is known. Then some properties of the function H are studied and it is proved that the characteristic values of the parameter λ can be developed into power series in ε, provided that ε is sufficiently small.

Finally some calculations are performed in the case of a rectangular reservoir.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА и ПУАССОНА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа посвящена вопросу замены дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона новыми более точными уравнениями в конечных разностях. Подробно рассматривается численный способ решения внутренней задачи Дирихле на плоскости и в пространстве для уравнения Лапласа и Пуассона.

§ 1. Введение

Рассмотрим некоторую плоскую область, ограниченную контуром γ. Образуем квадратную сетку на плоскости, разделив плоскость на квадраты посредством прямых, параллельных осям координат и отстоящих друг от друга на расстоянии h. Построим замкнутую ломаную γ', идущую по линиям сетки и как можно лучше подходящую к контуру γ, так чтобы γ' полностью лежала внутри γ. Узлы сетки, лежащие на γ', мы назовем граничными узлами.

Ввиду того что решение многих технических задач сводится к отысканию функции, которая внутри области, ограниченной контуром γ, удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа и Пуассона, а на границе принимает заданные значения, мы считаем полезным составление новых, быстро приводящих к цели, соотношений между значениями искомой функции в узлах сетки.

Для численного решения уравнения

$$\triangle u = \varphi(x, y) \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

с заданными на γ граничными значениями функции $u(x, y)$, мы вывели (1) формулу

$$u_0 = \frac{4[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + [u_5 + u_6 + u_7 + u_8]}{20} - \frac{3h^2}{10} \triangle u_0 - \frac{h^4}{40} \triangle^2 u_0, \quad (1)$$

где $u_0 = u(x_0, y_0)$, u_1, u_2, u_3, u_4 обозначают значения $u(x, y)$ в узлах сетки, отстоящих на h по горизонтали и вертикали от внутреннего узла с координатами x_0, y_0; u_5, u_6, u_7, u_8 — значения $u(x, y)$ в вершинах квадрата с центром в точке (x_0, y_0) со сторонами $2h$, параллельными

осям координат; наконец, $\triangle^s u_0$ сокращенно обозначает значение выражения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(s)} u(x, y) \quad (s=1, 2, \ldots)$$

при $x=x_0$, $y=y_0$.

При выводе (1) мы предполагали, что контур γ и условия на нем таковы, что искомая функция $u(x, y)$ допускает в области, ограниченной контуром γ, ограниченные производные до шестого порядка включительно, а на γ принимает наперед заданные непрерывные значения. При этих предположениях мы установили, что остаточный член формулы (1) шестого порядка малости относительно h.

Чтобы приступить к вычислениям, необходимо иметь значения u во всех узлах сетки, лежащих на γ'. Условимся, что эти значения определяются приближенно переносом значений $u(x, y)$ из точек контура γ, ближайших к узлам сетки, лежащим на γ'. Обозначим через η точную верхнюю границу абсолютных значений погрешностей, допущенных при этом переносе.

Если значения искомой функции в узлах сетки вычисляются с помощью формулы (1), то оценка погрешности будет иметь форму

$$|\xi| \leqslant \eta+\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \frac{M_6 h^4}{60},$$

где ξ обозначает погрешность, которая получается при вычислении значений искомой функции $u(x, y)$ в узлах сетки при помощи приближенных уравнений (1), M_6 — наибольшее значение абсолютных величин производных шестого порядка от u внутри γ', а a и b — полуоси эллипса, описанного около области, ограниченной γ.

Первое слагаемое правой части неравенства тем меньше, чем меньше уклоняются от истинных значений установленные нами значения $u(x, y)$ в граничных узлах сетки. Величина второго слагаемого зависит от ошибки, которую мы совершаем, заменяя дифференциальное уравнение Пуассона уравнением (1) в конечных разностях, и от области, ограниченной контуром γ.

Отсюда, чтобы оценить погрешность, которая получается при вычислении значений функции $u(x, y)$ в узлах сетки при помощи приближенных уравнений (1), достаточно знать, с каким приближением снесены предельные значения с γ на граничные узлы сетки, и погрешность, которую мы допускаем, заменяя дифференциальное уравнение Пуассона уравнением в конечных разностях.

Изложенное позволяет сделать определенные указания относительно выбора сетки. С одной стороны, в каждом частном случае отдается преимущество тому или иному типу сетки в зависимости от увязки вида сетки с формой контура γ, с другой — тем сеткам, которые способствуют построению с наибольшей степенью точности соотношений между значениями $u(x, y)$ в узлах сетки.

Так, например, если интересующая нас область есть квадрат, то эту область, в целях увязки сетки и пользования уравнениями в конечных разностях, со значительной степенью точности выгодно покрыть квадратной сеткой. Но если интересующая нас область представляет собою равносторонний треугольник, то решение задачи Дирихле проще всего выполнить при посредстве треугольной сетки. Как в первом, так и во втором случае все граничные узлы сетки будут лежать на γ и, следовательно, $\eta=0$.

Среди всевозможных видов сеток предпочтительнее пользоваться квадратными, ибо с их помощью, вообще говоря, наипростейшим образом осуществляется построение контура γ', апроксимирующего γ.

Нам удалось получить соотношения между значениями $u(x, y)$ в узлах квадратной сетки с погрешностью h^8. Кроме того, мы даем новые соотношения между значениями $u(x, y, z)$ в узлах кубической сетки. Порядок остаточных членов этих соотношений h^6 и h^8.

Если принять, что в узлах сетки, лежащих на поверхности, заменяющей данную поверхность, известны точные значения $u(x, y, z)$, то наши соотношения позволят чрезвычайно быстро найти решение задачи Дирихле в пространстве.

§ 2. Уравнение $\triangle u=\varphi(x, y)$ и соответствующие ему уравнения в конечных разностях

Поставим себе целью найти функцию $u(x, y)$, которая в области A, ограниченной контуром γ, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\triangle u=\varphi(x, y),$$

а на γ принимает данные непрерывные значения.

Предположим, что контур γ и условия на нем таковы, что существует функция $u(x, y)$, удовлетворяющая требуемым условиям, и что функции $u(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ непрерывны в A вместе со своими частными производными вплоть до того порядка, который используется при выводе нужных нам уравнений в конечных разностях. Пусть эти производные остаются непрерывными также при приближении точки (x, y) к γ изнутри.

Напишем уравнение (1) подробно. Ограничиваясь в правой части (1) членами до шестого порядка малости относительно h, получим

$$\begin{gathered}4[u_1+u_2+u_3+u_4]+[u_5+u_6+u_7+u_8]= \\ =20u_0+6h^2\triangle u_0+\frac{h^4}{2}\triangle^2 u_0+ \\ +\frac{h^6}{60}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6}+5\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4\,\partial y_0^2}+5\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2\,\partial y_0^4}+\frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6}\right]+R_1,\end{gathered} \tag{2}$$

где R_1 — величина восьмого порядка малости относительно h. Вычисление показывает, что

$$|R_1| \leqslant \frac{11}{840} M_8 h^8,$$

где M_8 — наибольшее значение абсолютных величин частных производных восьмого порядка от u внутри γ'.

С другой стороны, формула Тейлора дает:

$$\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4 = 4\Delta u_0 + h^2\Delta^2 u_0 + \\ + \frac{h^4}{12}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4\,\partial y_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2\,\partial y_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6}\right] + R_2, \quad (3)$$

$$\Delta u_5 + \Delta u_6 + \Delta u_7 + \Delta u_8 = 4\Delta u_0 + 2h^2\Delta^2 u_0 + \\ + \frac{h^4}{6}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6} + 7\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4\,\partial y_0^2} + 7\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2\,\partial y_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6}\right] + R_3, \quad (4)$$

причем Δu_1, Δu_2, Δu_3, Δu_4 обозначают величину оператора Лапласа для функции $u(x, y)$ в узлах сетки, отстоящих на h по горизонтали и вертикали от точки (x_0, y_0), а Δu_5, Δu_6, Δu_7, Δu_8 — величину того же оператора для функции $u(x, y)$ в вершинах квадрата с центром в точке (x_0, y_0) и со сторонами $2h$, параллельными осям координат.

Вычисление показывает, что

$$|R_2| \leqslant \frac{M_8 h^6}{90}, \quad |R_3| \leqslant \frac{16}{45} M_8 h^6,$$

где M_8 имеет то же значение, что и выше.

Умножим соотношение (2) на α, а соотношение (3) на βh^2 и сложим их. Определим неизвестные множители α и β таким образом, чтобы производные шестого порядка образовали

$$\Delta^3 u_0 = \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6} + 3\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4\,\partial y_0^2} + 3\,\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2\,\partial y_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6}.$$

Для этого, очевидно, должны иметь место уравнения

$$\alpha + 5\beta = 1,$$
$$5\alpha + 5\beta = 3,$$

из которых находим

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{10}.$$

При таком выборе α и β получим:

$$4[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + [u_5 + u_6 + u_7 + u_8] = \\ = 20\,u_0 + \frac{h^2}{5}[34\,\Delta u_0 - \Delta u_1 - \Delta u_2 - \Delta u_3 - \Delta u_4] + \\ + \frac{7h^4}{10}\Delta^2 u_0 + \frac{h^6}{30}\Delta^3 u_0 + R.$$

Остаточный член R полученного соотношения имеет вид

$$R = R_1 + \frac{R_2 h^2}{5},$$

причем вычисление показывает, что

$$|R| \leqslant \frac{193}{12\,600} M_8 h^8.$$

Если в только что выведенном соотношении отбросить R, то получится следующее уравнение в конечных разностях:

$$u_0 = \frac{4[u_1+u_2+u_3+u_4]+[u_5+u_6+u_7+u_8]}{20} -$$
$$-\frac{h^2}{100}[34\,\triangle u_0 - \triangle u_1 - \triangle u_2 - \triangle u_3 - \triangle u_4] -$$
$$-\frac{7}{200}h^4\triangle^2 u_0 - \frac{h^6}{600}\triangle^3 u_0. \qquad (5)$$

Умножим соотношение (2) на α, а соотношение (4) на βh^2 и сложим их. Определим неизвестные множители α и β таким образом, чтобы производные шестого порядка образовали $\triangle^3 u_0$. Для этого, очевидно, должны быть удовлетворены уравнения

$$\alpha + 10\beta = 1,$$
$$5\alpha + 70\beta = 3,$$

из которых находим

$$\alpha = 2, \quad \beta = -\frac{1}{10}.$$

При таком выборе α и β получим:

$$4[u_1+u_2+u_3+u_4]+[u_5+u_6+u_7+u_8] =$$
$$= 20u_0 + \frac{h^2}{20}[116\triangle u_0 + \triangle u_5 + \triangle u_6 + \triangle u_7 + \triangle u_8] +$$
$$+\frac{2h^4}{5}\triangle^2 u_0 + \frac{h^6}{120}\triangle^3 u_0 + R'.$$

Остаточный член R' полученного соотношения имеет вид:

$$R' = R_1 - \frac{R_3 h^2}{20}.$$

Вычисляя, находим

$$|R'| \leqslant \frac{389}{12\,600} M_8 h^8.$$

Если в только что выведенном соотношении мы отбросим R', то получим следующее уравнение в конечных разностях:

$$u_0 = \frac{4[u_1+u_2+u_3+u_4]+[u_5+u_6+u_7+u_8]}{20} -$$
$$-\frac{h^2}{400}[116\triangle u_0 + \triangle u_5 + \triangle u_6 + \triangle u_7 + \triangle u_8] -$$
$$-\frac{h^4}{50}\triangle^2 u_0 - \frac{h^6}{2400}\triangle^3 u_0. \qquad (6)$$

Наконец, умножая соотношения (3) и (4) на h^2 и исключая из (2) и (3) или (2) и (4) $h^4\triangle^2 u_0$, получим:

$$u_0 = \frac{4[u_1+u_2+u_3+u_4]+[u_5+u_6+u_7+u_8]}{20} -$$
$$-\frac{h^2}{40}[8\triangle u_0 + \triangle u_1 + \triangle u_2 + \triangle u_3 + \triangle u_4], \qquad (7)$$

$$u_0 = \frac{4[u_1+u_2+u_3+u_4]+[u_5+u_6+u_7+u_8]}{20} -$$
$$-\frac{h^2}{80}[20\triangle u_0 + \triangle u_5 + \triangle u_6 + \triangle u_7 + \triangle u_8]. \qquad (8)$$

Остаточные члены этих формул шестого порядка малости относительно h.

Заметим еще, что при численном решении уравнения Пуассона с помощью соотношений (7) или (8) не приходится дифференцировать функции $\varphi(x, y)$, стоящей в правой части уравнения, а иметь дело лишь с ее численными значениями в узлах сетки. Следовательно, функция $\varphi(x, y)$ может быть задаваема графически или таблично.

В случае уравнения Лапласа соотношения (5), (6), (7) и (8) примут вид

$$u_0 = \frac{4[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + [u_5 + u_6 + u_7 + u_8]}{20}.$$

Рассмотрим соотношения (5), (6), (7) и (8), которые должны быть соблюдены для внутренних узлов сетки. Каждое из них доставит систему n линейных уравнений с n неизвестными, где n — число внутренних узлов сетки. Пользуясь какой-нибудь из этих систем, мы можем по значениям $u(x, y)$ в граничных узлах найти значения $u(x, y)$ во всех внутренних узлах сетки. Таким образом численное решение уравнения $\Delta u = \varphi(x, y)$ осуществляется фактическим решением n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Решение системы может быть выполнено, например, методом итерации.

Легко доказать, что каждая из полученных систем при любой непрерывной последовательности заданных значений u на γ имеет решение, и что это решение единственное *.

Все изложенное выше для уравнения Пуассона может быть перенесено на уравнение

$$\Delta u - \lambda u = \varphi(x, y), \tag{9}$$

где λ — некоторое положительное число.

Пусть задача состоит опять в определении функции $u(x, y)$, которая внутри области, ограниченной замкнутой кривой γ, удовлетворяет дифференциальному уравнению (9), а на границе принимает данные непрерывные значения.

Пусть контур γ и условия на нем таковы, что функции $u(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в интересующей нас области непрерывны вместе со своими частными производными вплоть до того порядка, который будет использован ниже при выводе необходимого нам уравнения в конечных разностях. Пусть эти производные остаются непрерывными также при приближении точки (x, y) к γ изнутри.

Из уравнения (9) следует, что

$$\begin{aligned}
\Delta u_0 &= \lambda u_0 + \varphi_0,\\
\Delta^2 u_0 &= \Delta\varphi_0 + \lambda\varphi_0 + \lambda^2 u_0,\\
\Delta^3 u_0 &= \Delta^2\varphi_0 + \lambda\Delta\varphi_0 + \lambda^2\varphi_0 + \lambda^3 u_0,
\end{aligned}$$

* Доказательство подобно доказательству С. А. Гершгорина для системы уравнений, совершенно отличной от наших систем. За подробностями по этому вопросу отсылаем к исследованию С. А. Гершгорина ([2]).

где φ_0 обозначает значение $\varphi(x, y)$ в узле сетки (x_0, y_0), а $\Delta^s\varphi_0$ значение выражения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(s)}\varphi(x, y) \quad (s=1, 2)$$

при $x=x_0$, $y=y_0$.

Внося выражения для Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, например в (5), после простых вычислений находим, что дифференциальное уравнение (9) может быть заменено следующим уравнением в конечных разностях:

$$\left[1+\frac{34}{100}\lambda h^2+\frac{7}{200}\lambda^2 h^4+\frac{\lambda^3 h^6}{600}\right]u_0=$$
$$=\frac{(20+\lambda h^2)(u_1+u_2+u_3+u_4)+5(u_5+u_6+u_7+u_8)}{100}-$$
$$-\frac{h^2}{100}[34\varphi_0-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4]-\frac{7h^4}{200}[\Delta\varphi_0+\lambda\varphi_0]-$$
$$-\frac{h^6}{600}[\Delta^2\varphi_0+\lambda\Delta\varphi_0+\lambda^2\varphi_0],$$

где φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 обозначают значения $\varphi(x, y)$ в узлах сетки, отстоящих на h по горизонтали и вертикали от узла (x_0, y_0).

Погрешность полученного уравнения в конечных разностях порядка h^8.

§ 3. Оценка погрешности. Сходимость процесса

Заключим область A, ограниченную кривой γ, в эллипс с полуосями a и b, параллельными координатным осям, так, чтобы эллипс возможно ближе примыкал к γ. Вычисление, аналогичное тому, какое мы проделали в работе [1], показывает, что, например, уравнению (5) соответствует оценка погрешности

$$|\xi|\leqslant\eta+\frac{193}{151200}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}M_8h^6,$$

где ξ обозначает погрешность, которая получается при вычислении значений искомой функции u в узлах сетки с помощью приближенных уравнений (5), а η — точная верхняя граница абсолютных значений разности между теми значениями u, которые мы получили после сноса их с γ на γ', и истинными значениями u в соответствующих граничных узлах.

Перейдем к исследованию погрешности на контуре γ'. Можно легко дать оценку разности между приближенными значениями u в узлах сетки, лежащих на γ', и действительными значениями u в тех же узлах сетки. Так как мы условились значения u сносить из точек γ, ближайших к узлам сетки, лежащим на γ', то абсолютное значение интересующей нас разности не превзойдет $2Mh$, где M — наибольшее абсолютное значение частных производных 1-го порядка от u внутри γ. Таким образом мы можем положить $\eta\leqslant 2Mh$. Тогда, очевидно,

$$|\xi|\leqslant 2Mh+\frac{193}{151200}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}M_8h^6.$$

Отсюда ясно, что при $h \to 0$ будет стремиться к нулю и правая часть и, следовательно, $\xi \to 0$.

Заметим также, что, пользуясь изложенными выше соображениями, можно оценить погрешность, происходящую при применении соотношений (6), (7) и (8). Если предположить, что граничные узлы сетки лежат на γ, т. е. что $\eta = 0$, то погрешность, которая получится при вычислении значений функции $u(x, y)$ в узлах сетки при помощи приближенных уравнений (6), будет шестого порядка малости относительно h, а погрешность, соответствующая вычислению с помощью приближенных уравнений (7) и (8),—порядка h^4.

§ 4. Численное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varphi(x, y, z).$$

Поставим себе целью найти функцию $u(x, y, z)$, которая в области D, ограниченной замкнутой поверхностью S, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u = \varphi(x, y, z) \quad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

а на поверхности S условию $u = f(x, y, z)$.

Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывным образом изменяется вместе с положением точки (x, y, z) на поверхности S. Предположим, что поверхность S и условия на ней таковы, что существует функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая требуемым условиям, и что функции $u(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными, вплоть до того порядка, который используется при выводе необходимых нам уравнений в конечных разностях. Пусть эти производные остаются непрерывными также при приближении точки (x, y, z) к S изнутри.

Образуем кубическую сетку в пространстве, разделив пространство на кубы с ребром h посредством плоскостей, параллельных координатным плоскостям и равноотстоящих друг от друга. Построим затем замкнутую поверхность S', следуя граням кубиков сетки, как можно лучше подходящей к поверхности S, так, чтобы S' полностью лежала внутри S. Узлы сетки, лежащие на S', мы назовем граничными узлами, а узлы сетки, лежащие внутри S,—внутренними узлами сетки.

Для численного решения уравнения

$$\Delta u = \varphi(x, y, z), \tag{10}$$

с заданными на S граничными значениями функции $u(x, y, z)$, (10) заменяют следующим уравнением в конечных разностях *:

$$\begin{aligned} &u(x_0 - h, y_0, z_0) + u(x_0 + h, y_0, z_0) + u(x_0, y_0 - h, z_0) + \\ &+ u(x_0, y_0 + h, z_0) + u(x_0, y_0, z_0 - h) + u(x_0, y_0, z_0 + h) - \\ &- 6u(x_0, y_0, z_0) = h^2 \Delta u(x_0, y_0, z_0), \end{aligned} \tag{11}$$

* См., например, (3).

где x_0, y_0, z_0 — координаты какого-нибудь внутреннего узла кубической сетки.

Погрешность, которая получается при замене заданного нам дифференциального уравнения (10) уравнением (11), будет порядка h^4.

Число уравнений (11) равно числу внутренних узлов сетки. Допустим, что каким-либо путем установлены приближенные значения функции $u(x, y, z)$ в граничных узлах сетки. Это можно осуществить, например, переносом значений $u(x, y, z)$ из точек поверхности S, ближайших к граничным узлам сетки. Тогда решение данной проблемы осуществится фактическим решением n линейных уравнений вида (11) с n неизвестными, где n — число внутренних узлов сетки.

Заключим область D, ограниченную поверхностью S, в эллипсоид с полуосями a, b и c, параллельными координатным осям, так, чтобы эллипсоид возможно ближе примыкал к S.

Если значения искомой функции в узлах сетки вычисляются с помощью (11), то оценка погрешности будет иметь форму:

$$|\xi| \leqslant \eta + \frac{1}{8} \frac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} M_4 h^2,$$

где ξ обозначает погрешность, которая получается при вычислении значений искомой функции $u(x, y, z)$ в узлах сетки при помощи приближенных уравнений (11), η — точная верхняя граница абсолютных значений разности между теми значениями u, которые мы получили после сноса их с S на S', и истинными значениями u в соответствующих граничных узлах, M_4 — наибольшее значение абсолютных величин частных производных четвертого порядка от u внутри S'.

При сколько-нибудь малых значениях h число внутренних узлов сетки, а вместе с тем и число уравнений (11) так возрастает, что изложенный способ решения становится исключительно кропотливым.

Мы даем новые соотношения между значениями $u(x, y, z)$ в узлах кубической сетки. Порядок остаточных членов этих соотношений h^6 и h^8, а максимальное отклонение вычисляемых при помощи этих соотношений приближенных значений $u(x, y, z)$ от точных значений $u(x, y, z)$ в соответствующих узлах сетки — порядка h^4 и h^6.

Наши формулы позволяют путем увеличения h уменьшить число внутренних узлов сетки и тем самым гарантируют возможность доведения до конца обширной вычислительной работы.

§ 5. Уравнение $\triangle u = \varphi(x, y, z)$ и соответствующие ему уравнения в конечных разностях

Представим себе, что внутренний узел сетки с координатами x_0, y_0, z_0 выбран за центр кубика сетки с ребрами $2h$, параллельными координатным осям. Грань кубика, перпендикулярную оси Oz и имеющую центр в узле $(x_0, y_0, z_0 + h)$, назовем первым квадратом. Через центр кубика проведем секущую плоскость перпендикулярно оси Oz. В сече-

нии получим второй квадрат с центром в точке (x_0, y_0, z_0). Грань кубика, перпендикулярную оси Oz и имеющую центр в узле $(x_0, y_0, z_0 - h)$, назовем третьим квадратом.

Пусть $\sum\limits_i u_i$ обозначает сумму значений функции $u(x, y, z)$ в середине сторон второго квадрата и в центре первого и третьего квадратов. Выписывая $\sum\limits_i u_i$ подробно, получим:

$$\sum_i u_i = u(x_0 - h, y_0, z_0) + u(x_0 + h, y_0, z_0) + u(x_0, y_0 - h, z_0) + \\ + u(x_0, y_0 + h, z_0) + u(x_0, y_0, z_0 - h) + u(x_0, y_0, z_0 + h).$$

По формуле Тейлора имеем:

$$u(x_0 + h, y_0, z_0) + u(x_0 - h, y_0, z_0) = 2u_0 + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{2h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + R_1,$$
$$u(x_0, y_0 + h, z_0) + u(x_0, y_0 - h, z_0) = 2u_0 + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} + \frac{2h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y_0^4} + R_2,$$
$$u(x_0, y_0, z_0 + h) + u(x_0, y_0, z_0 - h) = 2u_0 + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} + \frac{2h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial z_0^4} + R_3,$$

где R_1, R_2 и R_3 — величины шестого порядка малости относительно h.

Сложим все эти равенства. В результате получим:

$$\sum_i u_i = 6u_0 + h^2 \triangle u_0 + \frac{h^4}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z_0^4} \right] + R_4, \qquad (12)$$

где

$$R_4 = R_1 + R_2 + R_3.$$

Вычисление показывает, что

$$|R_4| \leqslant \frac{M_6 h^6}{120},$$

где M_6—наибольшее значение абсолютных величин частных производных шестого порядка от u внутри S'.

Пусть $\sum\limits_k u_k$ обозначает сумму значений функции $u(x, y, z)$ в середине сторон первого и третьего квадратов и в вершинах второго квадрата. Пусть $\triangle^s u_0$ обозначает значение выражения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^{(s)} u(x, y, z) \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Выписывая $\sum\limits_k u_k$ подробно, получаем:

$$\sum_k u_k = u(x_0 - h, y_0, z_0 + h) + u(x_0 + h, y_0, z_0 + h) + u(x_0, y_0 - h, z_0 + h) + \\ + u(x_0, y_0 + h, z_0 + h) + u(x_0 - h, y_0, z_0 - h) + u(x_0 + h, y_0, z_0 - h) + \\ + u(x_0, y_0 - h, z_0 - h) + u(x_0, y_0 + h, z_0 - h) + u(x_0 + h, y_0 + h, z_0) + \\ + u(x_0 - h, y_0 + h, z_0) + u(x_0 - h, y_0 - h, z_0) + u(x_0 + h, y_0 - h, z_0).$$

Вернемся к кубику сетки с ребрами $2h$, параллельными координатным осям, и с центром в узле (x_0, y_0, z_0). Через узел (x_0, y_0, z_0) проведем секущие плоскости, параллельные координатным плоскостям. Выпишем

подробно для квадратов, получившихся в сечениях, соотношения, аналогичные соотношению (13) в работе ([1]). После сложения этих соотношений получим

$$8\sum_i u_i+\sum_k u_k=60u_0+12h^2\triangle u_0+h^4\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y_0^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^4 u}{\partial z_0^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2\partial y_0^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y_0^2\partial z_0^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2\partial z_0^2}\right]+R_5, \tag{13}$$

причем

$$|R_5|\leqslant\frac{3}{5}M_6h^6.$$

Умножим соотношение (12) на α, а соотношение (13) на β и сложим их. Определим неизвестные множители α и β таким образом, чтобы производные четвертого порядка образовали

$$\triangle^2 u_0=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{(2)}u(x_0, y_0, z_0).$$

Для этого, очевидно, должны быть удовлетворены уравнения

$$\frac{\alpha}{12}+\beta=1,$$
$$\beta=2,$$

которые дают

$$\alpha=-12,\quad \beta=2.$$

При таком выборе α и β получим

$$2\sum_i u_i+\sum_k u_k=24u_0+6h^2\triangle u_0+\frac{h^2}{2}\triangle^2 u_0+R. \tag{14}$$

Остаточный член (14) имеет выражение

$$R=R_5-6R_4.$$

Вычисляя, находим

$$R\leqslant\frac{13}{20}M_6h^6.$$

Вернемся к соотношению (14). Отбрасывая остаточный член, получим уравнение в конечных разностях

$$u_0=\frac{2\sum_i u_i+\sum_k u_k}{24}-\frac{h^2}{4}\triangle u_0-\frac{h^4}{48}\triangle^2 u_0. \tag{15}$$

Пусть $\sum_r u_r$ обозначает сумму значений u в вершинах первого и третьего квадратов. Выписывая $\sum_r u_r$ подробно, получим:

$$\sum_r u_r=u(x_0-h, y_0+h, z_0+h)+u(x_0+h, y_0+h, z_0+h)+$$
$$+u(x_0-h, y_0-h, z_0+h)+u(x_0+h, y_0-h, z_0+h)+$$
$$+u(x_0-h, y_0+h, z_0-h)+u(x_0+h, y_0+h, z_0-h)+$$
$$+u(x_0-h, y_0-h, z_0-h)+u(x_0+h, y_0-h, z_0-h).$$

Пользуясь формулой Тейлора, можем написать:

$$u(x_0-h, y_0+h, z_0+h)+u(x_0+h, y_0+h, z_0+h)+$$
$$+u(x_0-h, y_0-h, z_0+h)+u(x_0+h, y_0-h, z_0+h)=$$
$$=4u(x_0, y_0, z_0+h)+2h^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0+h}}+$$
$$+\frac{4h^4}{4!}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0+h}}+R_1',$$

$$u(x_0-h, y_0+h, z_0-h)+u(x_0+h, y_0+h, z_0-h)+$$
$$+u(x_0-h, y_0-h, z_0-h)+u(x_0+h, y_0-h, z_0-h)=$$
$$=4u(x_0, y_0, z_0-h)+2h^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0-h}}+$$
$$+\frac{4h^4}{4!}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0-h}}+R_2',$$

причем

$$|R_1'|\leqslant\frac{8}{45}M_6h^6,\quad |R_2|\leqslant\frac{8}{45}M_6h^6.$$

После сложения только что написанных равенств получим:

$$\sum_r u_r=4[u(x_0, y_0, z_0+h)+u(x_0, y_0, z_0-h)]+$$
$$+2h^2\left\{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0+h}}+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0-h}}\right\}+$$
$$+\frac{4h^4}{4!}\left\{\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0+h}}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0-h}}\right\}+R_1'+R_2'. \quad (16)$$

По формуле Тейлора имеем:

$$u(x_0, y_0, z_0+h)+u(x_0, y_0, z_0-h)=2u_0+h^2\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}+\frac{2h^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial z_0^4}+R_3',$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0+h}}+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0-h}}=$$
$$=2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}\right]+h^2\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2\partial z_0^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y_0^2\partial z_0^2}\right]+R_4',$$

$$\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0+h}}+\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0-h}}=$$
$$=2\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2\partial y_0^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y_0^4}\right]+R_5',$$

где

$$|R_3'|\leqslant\frac{M_6h^6}{360},\quad |R_4'|\leqslant\frac{M_6h^4}{6},\quad |R_5'|\leqslant 8M_6h^2.$$

Подставив в выражение (16) полученные разложения, найдем

$$\sum_r u_r = 8u_0 + 4h^2 \triangle u_0 + \frac{h^4}{3}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y_0^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z_0^4} + \right.$$
$$\left. + 6\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2 \partial z_0^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y_0^2 \partial z_0^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^2 \partial y_0^2}\right)\right] + R_6', \qquad (17)$$

где

$$R_6' = R_1' + R_2' + 4R_3' + 2h^2 R_4' + \frac{h^4 R_5'}{6}.$$

Вычисление дает

$$|R_6'| \leqslant \frac{61}{30} M_6 h^6.$$

Умножим соотношение (12) на α, а соотношение (17) на β и сложим их. Выберем неизвестные множители α и β таким образом, чтобы при суммировании производные четвертого порядка образовали $\triangle^2 u_0$. Для этого должны быть удовлетворены уравнения

$$\frac{\alpha}{12} + \frac{\beta}{3} = 1,$$
$$2\beta = 2,$$

которые дают

$$\alpha = 8, \quad \beta = 1.$$

При таком выборе α и β получим:

$$8\sum_i u_i + \sum_r u_r = 56u_0 + 12h^2 \triangle u_0 + h^4 \triangle^2 u_0 + R'. \qquad (18)$$

Остаточный член полученного равенства имеет выражение

$$R' = 8R_4 + R_1' + R_2' + 4R_3' + 2h^2 R_4' + \frac{h^4}{6} R_5'.$$

Рассматривая только абсолютные значения, мы можем написать

$$|R'| \leqslant \frac{21}{10} M_6 h^6.$$

Вернемся к уравнению (18). Если мы отбросим в нем R', то получим следующее приближенное равенство:

$$u_0 = \frac{8\sum_i u_i + \sum_r u_r}{56} - \frac{3h^2}{14}\triangle u_0 - \frac{h^4}{56}\triangle^2 u_0. \qquad (19)$$

Продолжая разложение Тейлора до членов восьмого порядка, мы можем представить соотношения (14) и (18) в виде:

$$2\sum_i u_i + \sum_k u_k = 24u_0 + 6h^2 \triangle u_0 + \frac{h^4}{2}\triangle^2 u_0 +$$
$$+ \frac{h^6}{60}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^6} + 5\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2 \partial z_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^2 \partial z_0^4} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^2 \partial x_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^2 \partial y_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2 \partial y_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^2 \partial x_0^4}\right)\right] + R_1'',$$

$$8\sum_i u_i + \sum_r u_r = 56u_0 + 12h^2 \triangle u_0 + h^4 \triangle^2 u_0 +$$
$$+ \frac{h^6}{30}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^6} + 5\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2 \partial z_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^2 \partial z_0^4} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^2 \partial x_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^2 \partial y_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2 \partial y_0^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^2 \partial x_0^4}\right) + 30\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^2 \partial y_0^2 \partial z_0^2}\right] + R_2''.$$

Рассмотрим еще разложение

$$h^2 \sum_i \triangle u_i = 6h^2 \triangle u_0 + h^4 \triangle^2 u_0 + \frac{h^6}{12}\Big[\frac{\partial^6 u}{\partial x_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4 \partial y_0^2} +$$
$$+ \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^4 \partial x_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial y_0^4 \partial z_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^4 \partial y_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_0^4 \partial z_0^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial z_0^4 \partial x_0^2}\Big] + R_3'',$$

где $\sum_i \triangle u_i$ обозначает сумму значений оператора Лапласа для функции $u(x, y, z)$ в середине сторон второго квадрата и в центре первого и третьего квадратов, т. е.

$$\sum_i \triangle u_i = \varphi(x_0 - h, y_0, z_0) + \varphi(x_0 + h, y_0, z_0) + \varphi(x_0, y_0 - h, z_0) +$$
$$+ \varphi(x_0, y_0 + h, z_0) + \varphi(x_0, y_0, z_0 - h) + \varphi(x_0, y_0, z_0 + h).$$

Остаточные члены R_1'', R_2'' и R_3'' восьмого порядка малости относительно h.

Рассмотрим сумму

$$\alpha\Big[2\sum_i u_i + \sum_k u_k\Big] + \beta\Big[8\sum_i u_i + \sum_r u_r\Big] + \gamma h^2 \sum_i \triangle u_i,$$

заменим в ней $2\sum_i u_i + \sum_k u_k$, $8\sum_i u_i + \sum_r u_r$ и $h^2\sum_i \triangle u_i$ полученными выше разложениями и определим α, β, γ таким образом, чтобы производные шестого порядка образовали

$$\triangle^3 u_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{(3)} u(x_0, y_0, z_0).$$

Для этого должны быть удовлетворены уравнения

$$\frac{\alpha}{60} + \frac{\beta}{30} + \frac{\gamma}{12} = 1,$$
$$\frac{5\alpha}{60} + \frac{5\beta}{30} + \frac{\gamma}{12} = 3,$$
$$\beta = 6,$$

из которых два первых дают

$$\alpha = 18, \quad \gamma = 6.$$

При таком выборе α, β, γ рассматриваемая сумма обращается в

$$14\sum_i u_i + 3\sum_k u_k + \sum_r u_r = 128 u_0 + h^2\Big[36 \triangle u_0 - \sum_i \triangle u_i\Big] -$$
$$- \frac{7h^4}{2} \triangle^2 u_0 - \frac{h^6}{6} \triangle^3 u_0 + R'',$$

где остаточный член R'' восьмого порядка малости относительно h.

Пренебрегая остаточным членом R'', получим уравнение в конечных разностях:

$$u_0 = \frac{14\sum_i u_i + 3\sum_k u_k + \sum_r u_r}{128} - \frac{h}{128}\Big[36 \triangle u_0 - \sum_i \triangle u_i\Big] -$$
$$- \frac{7h^4}{256} \triangle^2 u_0 - \frac{h^6}{768} \triangle^3 u_0. \qquad (20)$$

В заключение заметим, что для вычисления значений функции $u(x, y, z)$ в узлах сетки при помощи приближенных формул (15), (19) или (20) по известным значениям $u(x, y, z)$ в граничных узлах сетки мы прежде всего выписываем уравнения, которые должны быть удовлетворены для узлов сетки. Каждое из соотношений (15), (19) и (20) доставит некоторую систему линейных алгебраических уравнений. Неизвестными будут значения u для внутренних узлов сетки. Число их, очевидно, будет равно числу внутренних узлов сетки. Таким образом нам необходимо будет решить систему n уравнений с n неизвестными, где n — число внутренних узлов сетки. Решение этой системы может быть выполнено, например, методом итерации.

Точно так же, как это было указано в § 3, можно доказать, что система n линейных уравнений вида (15), (19) и (20) с n неизвестными имеет вполне определенное единственное решение при любой непрерывной последовательности заданных значений u на S.

Все изложенное выше для уравнения (10) может быть перенесено на уравнение

$$\triangle u - \lambda u = \varphi(x, y, z),$$

где λ — некоторое положительное число.

Пусть задача состоит опять в определении функции $u(x, y, z)$, которая внутри области D, ограниченной замкнутой поверхностью S, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\triangle u - \lambda u = \varphi(x, y, z)$, а на поверхности S принимает данные непрерывные значения.

Пусть поверхность S и условия на ней таковы, что функции $u(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ непрерывны в области D вместе со своими частными производными вплоть до того порядка, который будет использован ниже при выводе необходимого нам уравнения в конечных разностях. Пусть эти производные остаются непрерывными также при приближении точки (x, y, z) к S изнутри.

Из данного уравнения следует, что

$$\triangle u_0 = \lambda u_0 + \varphi_0,$$
$$\triangle^2 u_0 = \triangle \varphi_0 + \lambda \varphi_0 + \lambda^2 u_0,$$

где φ_0 обозначает значение $\varphi(x, y, z)$ в узле сетки (x_0, y_0, z_0), а $\triangle \varphi_0$ — значение выражения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi(x, y, z)$$

при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Внося выражения для $\triangle u_0$, $\triangle^2 u_0$, например, в (19), после простых вычислений находим, что интересующее нас дифференциальное уравнение может быть приближенно заменено уравнением в конечных разностях:

$$\left(1 + \frac{3\lambda h^2}{14} + \frac{\lambda^2 h^4}{56}\right) u_0 = \frac{8 \sum\limits_i u_i + \sum\limits_r u_r}{56} - \frac{3h^2}{14} \varphi_0 - \frac{h^4}{56} (\triangle \varphi_0 + \lambda \varphi_0).$$

Погрешность этого уравнения порядка h^6.

Рассмотрим однородное изотропное проводящее тело, находящееся в тепловом равновесии, когда точки поверхности тела поддерживаются при заданных температурах. Известно, что для определения температуры в произвольной внутренней точке этого тела мы должны отыскать функцию $u(x, y, z)$, которая в области, ограниченной поверхностью S, удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

а в точках на поверхности принимает заданные значения.

Для численного решения интересующей нас проблемы мы должны заменить дифференциальное уравнение Лапласа одним из следующих уравнений в конечных разностях:

$$u_0=\frac{2\sum\limits_i u_i+\sum\limits_k u_k}{24}, \tag{21}$$

$$u_0=\frac{8\sum\limits_i u_i+\sum\limits_r u_r}{56}, \tag{22}$$

$$u_0=\frac{14\sum\limits_i u_i+3\sum\limits_k u_k+\sum\limits_r u_r}{128}. \tag{23}$$

§ 6. Оценка погрешности. Сходимость процесса

Заключим область D, ограниченную поверхностью S, в эллипсоид с полуосями a, b и c, параллельными координатным осям, так, чтобы эллипсоид возможно ближе примыкал к S. Можно, как и выше, показать, что, например, формуле (19) соответствует оценка погрешности

$$|\xi|\leqslant\eta+\frac{7}{80}\,\frac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\,M_6h^4,$$

где ξ обозначает погрешность, которая получается при вычислении значений искомой функции u в узлах сетки при помощи приближенных уравнений (19), а η — точная верхняя граница абсолютных значений разности между теми значениями $u(x, y, z)$, которые мы получили после сноса их с S на S', и истинными значениями $u(x, y, z)$ в соответствующих граничных узлах.

Так как мы условились значения $u(x, y, z)$ сносить из точек S, ближайших к узлам, лежащим на S', то абсолютное значение интересующей нас разности не превзойдет $3Mh$, где M — наибольшее абсолютное значение частных производных 1-го порядка от u внутри S. Таким образом мы можем положить $\eta\leqslant 3Mh$. Тогда, очевидно,

$$|\xi|\leqslant 3Mh+\frac{7}{80}\,\frac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\,M_6h^4.$$

Отсюда ясно, что при $h\to 0$ будет стремиться к нулю и правая часть и, следовательно, $\xi\to 0$.

Пусть граничные узлы сетки лежат на S, т. е. $\eta=0$. Легко показать, что тогда погрешность, которая получится при вычислении значений $u(x, y, z)$ в узлах сетки при помощи приближенных уравнений (15), будет четвертого порядка малости относительно h, а погрешность, соответствующая вычислению при помощи приближенных уравнений (20),— порядка h^6.

§ 7. Численные примеры

I. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2e^{x+y}.$$

Пусть область изменения переменных x и y есть квадрат, ограниченный прямыми

$$x=0.5, \quad x=-0.5, \quad y=0.5, \quad y=-0.5.$$

Пусть ищется значение интеграла предложенного уравнения в центре квадрата, если известны его значения в вершинах и в середине сторон данного квадрата. Пусть $u_0=u(0, 0)$.

Разделим стороны квадрата пополам; тогда $h=\frac{1}{2}$. Если мы имеем

$$u(h, 0)=1.64872, \quad u(0, h)=1.64872, \quad u(-h, 0)=0.60653,$$
$$u(0, -h)=0.60653, \quad u(h, h)=2.71828, \quad u(-h, -h)=0.36788,$$
$$u(-h, h)=1.00000, \quad u(h, -h)=1.00000,$$

то можно составить таблицу, имеющую следующий вид:

1.00000	1.64872	2.71828
0.60653	u_0	1.64872
0.36788	0.60653	1.00000

Кроме того, простым вычислением получим:

$$\triangle u_0=2, \quad \triangle^2 u_0=4, \quad \triangle^3 u_0=8,$$
$$\sum_i u_i=9.02100, \quad \sum_k u_k=10.17232.$$

Мы можем теперь при помощи формул (1), (5), (6) вычислить соответствующие значения u_0 и поместить их в следующую таблицу:

		Ошибки
Истинное значение	$u_0=1.00000$	
По формуле Рунге *	$=1.00262$	0.00262
» » (1)	$=1.00016$	0.00016
» » (5)	$=1.00000$	0.00000
» » (6)	$=1.00000$	0.00000

Сравнивая теперь значения u_0, даваемые различными формулами, усматриваем, что в этом примере наши формулы (5) и (6) дают наилучшие приближения.

---

* $u_0=\frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{4}-\frac{h^2}{4}\triangle u_0$, где u_1, u_2, u_3, u_4 — значения $u(x, y)$ в узлах сетки, отстоящих на h по горизонтали и вертикали от центра клеточки сетки.

II. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Пусть область изменения переменных x, y, z есть прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям:

$$x=1,\ x=-1,\ y=1,\ y=-1,\ z=0,\ z=1.$$

Нужно найти функцию $u(x, y, z)$, которая удовлетворяет данному уравнению с граничными условиями:

на грани, расположенной в плоскости $z=0$,

$$u=\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2},$$

на грани, расположенной в плоскости $z=1$,

$$u=e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2},$$

а на остальных гранях $u=0$.

При этих условиях, очевидно, будем иметь

$$u=e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}z}\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2},$$

что позволит сравнить приближенные значения u с точными.

Пусть $h=\frac{1}{2}$. Перенумеруем внутренние узлы сетки, условившись отмечать одним и тем же номером узлы, в которых значения u одинаковы. Таблица значений u в узлах сетки, расположенных на плоскости $z=0$, имеет вид:

0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.50000	0.70711	0.50000	0.
0.	0.70711	1.00000	0.70711	0.
0.	0.50000	0.70711	0.50000	0.
0.	0.	0.	0.	0.

Значения u в узлах сетки, расположенных на плоскости $z=0.5$, можно поместить в таблицу:

0.	0.	0.	0.	0.
0.	u_2	u_3	u_2	0.
0.	u_3	u_1	u_3	0.
0.	u_2	u_3	u_2	0.
0.	0.	0.	0.	0.

Наконец, приведем таблицу значений u в узлах сетки, расположенных на плоскости $z=1$:

0.	0.	0.	0.	0.
0.	4.61029	6.51997	4.61029	0.
0.	6.51997	9.22059	6.51997	0.
0.	4.61029	6.51997	4.61029	0.
0.	0.	0.	0.	0.

Затем вычислим значения $\sum_i u_i$, $\sum_k u_k$, $\sum_r u_r$:

Узел	$\sum_i u_i$	$\sum_k u_k$	$\sum_r u_r$
$\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$	$4u_3 + 10.22059$	$4u_2 + 28.90832$	20.44116
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$2u_3 + 5.11029$	$u_2 + 14.45416$	10.22059
$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$	$u_1 + 2u_2 + 7.22708$	$2u_3 + 20.44117$	14.45416

Формула (11) для вычисления u_1, u_2, u_3 приводит к необходимости решения системы уравнений:

$$u_1 = \frac{4u_3 + 10.22059}{6},$$

$$u_2 = \frac{2u_3 + 5.11029}{6},$$

$$u_3 = \frac{u_1 + 2u_2 + 7.22708}{6}.$$

Решая эту систему, находим:

$$u_1 = 3.22256,$$

$$u_2 = 1.61128,$$

$$u_3 = 2.27870.$$

Пользуясь формулой (15) и условиями симметрии, напишем уравнения для узлов, расположенных на плоскости $z = 0.5$:

$$u_1 = \frac{4u_2 + 8u_3 + 49.34950}{24},$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 4u_3 + 24.67474}{24},$$

$$u_3 = \frac{2u_1 + 4u_2 + 34.89533}{22}.$$

Решая эту систему, находим:

$$u_1 = 3.01958,$$

$$u_2 = 1.50979,$$

$$u_3 = 2.13517.$$

Пусть теперь вычисления производятся с помощью формулы (19). Напишем уравнения для интересующих нас узлов:

$$u_1 = \frac{32u_3 + 102.20588}{56},$$
$$u_2 = \frac{16u_3 + 51.10291}{56},$$
$$u_3 = \frac{8u_1 + 16u_2 + 72.27080}{56},$$

или, выполняя вычисление:

$$u_1 = 3.06257,$$
$$u_2 = 1.53129,$$
$$u_3 = 2.16557.$$

Наконец, применяя формулу (20), получим:

$$u_1 = \frac{12u_2 + 56u_3 + 250.25438}{128},$$
$$u_2 = \frac{3u_1 + 28u_3 + 125.12713}{128},$$
$$u_3 = \frac{14u_1 + 28u_2 + 176.95679}{122}.$$

Из этих уравнений находим:

$$u_1 = 3.03699,$$
$$u_2 = 1.51850,$$
$$u_3 = 2.14748.$$

Следующая таблица дает результаты вычислений:

u	По форм. (11)	По форм. (15)	По форм. (19)	По форм. (20)	$e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}z} \cos\frac{\pi x}{2} \cos\frac{\pi y}{2}$
u_1	3.22256	3.01958	3.06257	3.03699	3.03654
u_2	1.61128	1.50979	1.53129	1.51850	1.51827
u_3	2.27870	2.13517	2.16557	2.14748	2.14717

Математический институт
Грузинского филиала
Академии Наук СССР.

Поступило
1. II. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Микеладзе Ш. Е., Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, Изд. Академии Наук СССР, 1936.

[2] Gerschgorin S., Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., **10**, 1930.

[3] Libmann H., Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen, Sitzungsberichte der Bayer. Acad. der Wissenschaften, Math.-phys. Kl., 1918, S. 385—416.

SCH. E. MIKELADZE. ÜBER DIE NUMERISCHE LÖSUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON LAPLACE UND POISSON

ZUSAMMENFASSUNG

Betrachten wir ein achsenparalleles Netzquadrat mit der Seitenlänge $2h$ und dem Mittelpunkt (x_0, y_0) in einem Gitterpunkt des Netzes. Es sei u_0 der Wert der Funktion $u(x, y)$ im Mittelpunkt des Quadrates, $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ die Summe der Werte von $u(x, y)$ in den Mittelpunkten der Quadratseiten, $u_5 + u_6 + u_7 + u_8$ die Summe der Werte von $u(x, y)$ in den Ecken des Quadrates. $\triangle^s u_0$ möge den Wert des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(s)} u(x, y) \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

für $x = x_0$, $y = y_0$ bezeichnen.

In der vorliegenden Arbeit werden neue Differenzengleichungen (5) und (6) * für die numerische Lösung der Gleichung $\triangle u = \varphi(x, y)$ gegeben, wobei die Werte der Funktion $u(x, y)$ an der Begrenzung vorgeschrieben sind. Die Restglieder dieser Gleichungen sind von achter Ordnung klein in Bezug auf h.

Betrachten wir einen achsenparallelen Netzwürfel mit der Kantenlänge $2h$ und dem Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) in einem Gitterpunkt des Netzes. Die zur Achse Oz senkrechte Seitenfläche des Würfels mit dem Mittelpunkt $(x_0, y_0, z_0 + h)$ im Gitterpunkt des Netzes nennen wir das erste Quadrat. Durch den Mittelpunkt des Würfels legen wir die zur Achse Oz senkrechte Ebene. Diese schneidet den Würfel in einem zweiten Quadrat mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0). Die zur Achse Oz senkrechte Seitenfläche des Würfels mit dem Mittelpunkt im Gitterpunkt $(x_0, y_0, z_0 - h)$ heisse das dritte Quadrat.

Es bezeichne u_0 den Wert der Funktion $u(x, y, z)$ im Mittelpunkt des Würfels, $\sum_i u_i$ die Summe der Werte der Funktion $u(x, y, z)$ in den Seitenmitten des zweiten Quadrates und in den Mittelpunkten des ersten und dritten Quadrates, $\sum_k u_k$ die Summe der Werte von $u(x, y, z)$ in den Seitenmitten des ersten und dritten Quadrates und in den Ecken des zweiten Quadrates, $\sum_r u_r$ die Summe der Werte von $u(x, y, z)$ in den Ecken des ersten und dritten Quadrates. Es sei ferner $\triangle^s u_0$ der Wert des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{(s)} u(x, y, z) \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ und endlich $\sum_i \triangle u_i$ die Summe der Werte des Laplaceschen Operators für die Funktion $u(x, y, z)$ in den Seitenmitten des zweiten Quadrates und in den Mittelpunkten des ersten und dritten Quadrates.

* Formelnummer des russischen Textes.

Die numerischen Werte der Funktion $u(x, y, z)$, die in einem von einer geschlossenen Fläche begrenzten Gebiet der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\varphi(x, y, z),$$

genügt und auf der Fläche vorgegebene stetige Werte annimmt, können mit Hilfe der neuen Differenzengleichungen (15), (19) und (20) erhalten werden.

Die Restglieder der Gleichungen (15) und (19) sind von sechster Ordnung klein in Bezug auf h, das Restglied der Gleichung (20) ist von der Ordnung h^8.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ПРЕМИРОВАНИЕ РАБОТ МОЛОДЫХ СОВЕТСКИХ МАТЕМАТИКОВ

24 ноября 1937 года на торжественном Общем собрании Академии Наук СССР, посвященном 20-й годовщине Великой Октябрьской Социалистической Революции, выступили с научными докладами молодые ученые. В числе последних были три математика: С. Л. Соболев, А. О. Гельфонд и Л. Г. Шнирельман.

За выдающиеся работы эти ученые, а также Л. С. Понтрягин постановлением Общего собрания Академии Наук премированы каждый по 5000 руб. Сокращенное изложение докладов С. Л. Соболева, А. О. Гельфонда и Л. Г. Шнирельмана печатается ниже.

С. Л. СОБОЛЕВ

ТЕОРИЯ ДИФФРАКЦИИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

В настоящем сообщении я намерен изложить содержание ряда моих работ периода 1931—1933 гг., относящихся к вопросу диффракции неустановившихся колебаний. В настоящее время я занят дальнейшим развитием этой теории.

Как известно, различные процессы распространения колебаний в однородной среде, если пренебречь теми факторами, которые вызывают затухание, будь то колебания электромагнитные, механические или иные, управляются по большей части одним и тем же уравнением в частных производных второго порядка:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где величина u в разных физических процессах имеет различный физический смысл. Она может обозначать, например, давление в случае звуковой волны, или какую-нибудь составляющую электрического или магнитного напряжения для электромагнитной волны и т. д.

Простейшая задача при интегрировании этого уравнения есть так называемая задача Коши, т. е. задача об отыскании неизвестной функции, если известны значения ее и скорости ее изменения в некоторый начальный момент времени:

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{t=0} &= F(x, y, z), \\ \frac{du}{dt}\Big|_{t=0} &= f(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эта задача легко решается, если распространение волн происходит в однородном неограниченном пространстве.

Если в начальный момент возмущение было сосредоточено в некоторой ограниченной области, а в остальном пространстве был покой (функция u обращалась в нуль), то возмущение побежит из этой области со скоростью c и через некоторое время уйдет на бесконечность. Через некоторое время во всякой точке на конечном расстоянии мы будем иметь покой. Энергия волны будет убывать по мере удаления

от источника возмущения обратно пропорционально квадрату расстояния, а амплитуда колебания — обратно пропорционально первой степени расстояния. Волны в такой среде распространяются прямолинейно.

Решение задачи сильно усложняется, если в среде имеются препятствия. Представим себе, например, что мы зовем кого-нибудь, отделенного от нас каким-либо строением. Звук нашего голоса не может пройти сквозь это строение и доходит уже не по прямому пути, а огибая это здание. Звук, разумеется, дойдет несколько ослабленным. У нас будет впечатление, что звук этот выходит прямо из-за угла, и мы не сумеем определить положение его источника.

Задача диффракции и есть задача определения законов, по которым происходит огибание волной препятствий, встречающихся на ее пути.

Влияние препятствий может сказываться различно на распространяющейся волне. В некоторых случаях стенка не позволяет частицам воздуха колебаться; в других случаях, в качестве примера которых я приведу препятствие для распространения упругих волн в виде выреза в упругой среде,—наоборот, частицы с одной стороны не испытывали никаких внешних сил.

Наиболее важными представляются два частных случая, математическая формулировка которых следующая:

I $u\Big|_s = 0$ неизвестная функция обращается в нуль на границе препятствия

II $\dfrac{du}{dn}\Big|_s = 0$ производная по нормам от неизвестной функции обращается в нуль на границе препятствия. (3)

Решение волнового уравнения (1) при условиях I или II на границе области и представляет собой математическую постановку задачи диффракции.

Большей частью при решении этой задачи делают различные частные предположения о природе изучаемых решений. Одно из наиболее распространенных предположений заключается в том, что колебание имеет строго периодический характер с заданной частотой, т. е. u имеет вид

$$a(x, y, z)\cos pt + b(x, y, z)\sin pt = \mathrm{R}\left\{e^{ipt} A(x, y, z)\right\}, \tag{4}$$

где A — комплексная функция x, y, z.

В этих предположениях задачей занимались довольно много. Наиболее значительные результаты в этой области принадлежат А. Зоммерфельду. В своих работах я не делаю этих предположений, а решаю вопрос в наиболее общем виде.

Препятствия для распространяющейся волны могут быть различного вида. В тех работах, о которых я говорю, предполагаю, что таким препятствием является либо вырезанный из среды бесконечный угол, либо стенка, проектирующаяся в одну сторону до бесконечности.

Если воспользоваться полярными координатами, то задача диффракции в этом случае есть задача колебания части пространства, где $-\alpha < \vartheta < \alpha$. Угол α может быть меньше или равен $\pi = 180°$. Граница S будет в этом случае состоять из двух полупрямых

$$\vartheta = \pm\alpha. \tag{5}$$

Задача диффракции есть задача об интегрировании уравнения (1) при начальных условиях (2) и краевых условиях (3) на границах (5).

Метод, использованный мною при решении этой задачи, основан на некоторых работах, сделанных совместно членом-корреспондентом Академии Наук СССР проф. В. И. Смирновым и мною в 1930—1932 гг.

В этих работах нами был построен особый класс решений волнового уравнения, получивший название функционально инвариантного класса. Напомню, как определяется этот класс.

Рассмотрим линейное уравнение относительно x, y, z с коэффициентами, не зависящими от некоторой переменной θ:

$$l(\theta)t + m(\theta)x + n(\theta)y = q(\theta), \tag{6}$$

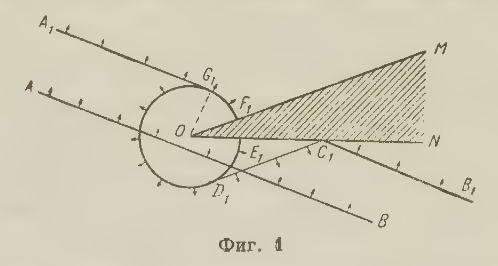
в котором коэффициенты $l(\theta)$, $m(\theta)$ и $n(\theta)$ связаны между собою формулой:

$$l^2 = (m^2 + n^2)c^2. \tag{7}$$

Будем рассматривать уравнение (7) как уравнение, служащее для определения неизвестной функции $\theta(x, y, t)$. Тогда функция θ, определенная из (6), и любая функция от нее $F(\theta)$, дифференцируемая 2 раза, будет представлять собою решение волнового уравнения. При этом безразлично, будет ли решение $F(\theta)$ вещественным или комплексным. Если $F(\theta)$ дает нам комплексное решение уравнения (1), то мы будем брать его вещественную часть $R[F(\theta)]$.

В тех работах В. И. Смирнова и моих, где этот класс решений был впервые введен, мы использовали его для получения ответа на задачу об упругих колебаниях полупространства, которая впервые была решена именно нами.

В качестве исходного элемента для построения решения рассматриваемой нами задачи можно взять частное решение задачи диффракции, содержащееся также внутри этого класса. Рассмотрим так называемую плоскую волну в нашем пространстве, т. е. такую волну, в которой фронт возмущения представляет собою плоскость, движущуюся со скоростью c, и в которой все явления во всех точках этой плоскости и всех ей параллельных (эти плоскости носят название изофазовых) происходят одинаково.



Фиг. 1

Нас будет интересовать некоторая плоская волна специального вида — ступенчатая волна, в которой значение функции u перед фронтом (в области покоя) равно нулю, а позади фронта — единице. Электротехники хорошо знают, что из волн такого типа может быть построена любая плоская волна.

Пусть на чертеже (фиг. 1) первоначальное положение фронта волны будет AB; через некоторое время фронт этот, распространяясь, достигнет линии A_1B_1. Однако наличие препятствия—угла MON уже разорвет фронт, который будет состоять из двух кусков: A_1G_1 и C_1B_1. Участок волны правее точки O, падая на ON, дает отраженную волну D_1C_1. Кроме того, начиная с момента, когда передний фронт волны достигнет вершины угла, сам угол сделается в свою очередь как бы источником дополнительного возмущения. Это возмущение будет сосредоточено внутри окружности с центром в O, касательной к линии A_1B_1 и D_1C_1.

Задача состоит именно в определении характера волны в центре этой окружности. Решение этой задачи получается в явном виде, если ввести функцию ζ по формуле:

$$at + \frac{i}{2}\left(\zeta + \frac{i}{\zeta}\right)x + \frac{i}{2}\left(\zeta - \frac{i}{\zeta}\right)y = 0. \tag{8}$$

Эта формула дает

$$\zeta = e^{i\vartheta}\left(\frac{at}{\rho} - \sqrt{\frac{a^2t^2}{\rho^2} - 1}\right), \tag{9}$$

где ρ и ϑ — две цилиндрические координаты нашего пространства.

Введем функцию комплексного переменного

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \lg(\zeta^{\gamma} - \zeta^{-\gamma}), \qquad (10)$$

где показатель γ зависит от угла растворения α.

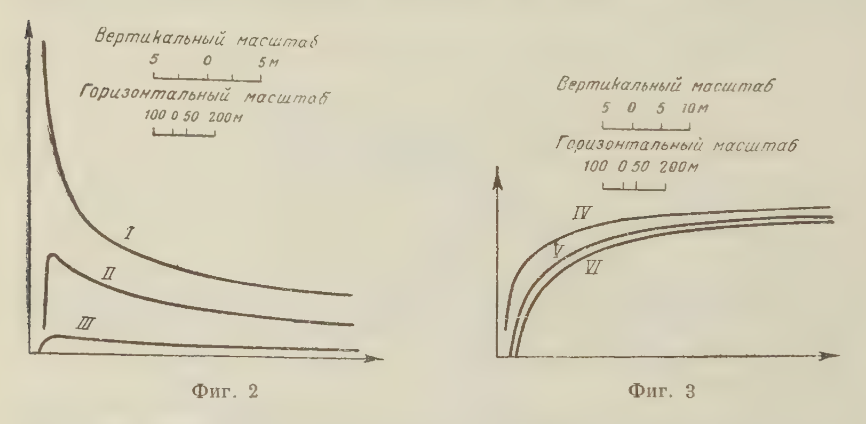
С помощью этой функции решение нашей задачи во всех случаях можно записать в следующем виде:

$$u = \mathrm{R}\left\{\Phi(e^{i\alpha_1}\zeta) + \Phi(e^{i\alpha_2}\zeta) + \Phi(e^{i\alpha_3}\zeta) + \Phi(e^{i\alpha_4}\zeta)\right\}, \qquad (11)$$

где α_1, α_2, α_3, α_4 — углы, зависящие от величины угла α и направления падения волны.

С помощью этой теории подсчет производится чрезвычайно легко. В качестве примера мною было численно рассчитано около 20 различных задач для изменения функции u в данной точке в зависимости от времени.

В случае, когда мы имеем дело с так называемой свободной границей, т. е. когда отраженная волна имеет тот же знак, что и падающая, графики этих функций имеют вид, показанный на фиг. 2. Для случая, когда граница жесткая или закрепленная, графики будут иметь вид, подобный изображенному на фиг. 3.



Фиг. 2 Фиг. 3

Для того чтобы решить общую задачу о диффракции при данных начальных условиях, можно воспользоваться наложением плоских элементарных волн, бегущих в разных направлениях и находящихся в разных фазах. Говоря более точно, нужно изменять параметры, от которых зависит построенное нами решение, и рассмотреть некоторые интегралы по этим параметрам. Такое интегрирование придется совершать по некоторым контурам, лежащим в комплексной плоскости.

Остановимся на одном существенном обстоятельстве. Строго говоря, плоская элементарная волна, которая является разрывной функцией, не может быть названа решением волнового уравнения (1). В самом деле, даже первые производные этой функции разрывны и обращаются в бесконечность на фронте волны. Мною было проведено исследование того, насколько допустимо пользование такого рода разрывными функциями в промежуточных вычислениях. Это исследование приводит к совершенно новым понятиям, являющимся расширением обычных понятий о решении данного уравнения.

Физикам хорошо знакомы особого рода математические образы, которые они привыкли называть функциями и которые, строго говоря, не суть функции в обычном смысле слова. Примером их служит так называемая δ-функция Дирака, которая обращается в нуль везде, кроме одной точки пространства. В этой точке она бесконечна и притом таким образом, что ее интеграл по всему пространству равен единице. Функции подобного типа, например такие, которые обращаются

в бесконечность на поверхностях и линиях, равны нулю повсюду вне их. Они таковы, что их интегралы отличны от нуля и могут быть объектом строгого математического изучения.

Это изучение было проведено мною в более поздней работе в самом общем виде с помощью одной из современных отраслей математики, возникшей уже в XX в., а именно, с помощью функционального анализа. Мне удалось перенести на эти функции все важнейшие операции дифференциального исчисления, в том числе теорию дифференциальных уравнений гиперболического типа, к которым относится разобранное выше дифференциальное уравнение.

Результатом этого исследования было подведение строгой научной базы под прием, описанный выше. Оно позволило установить полную законность использования разрывных решений в качестве промежуточного звена при построении решений классической задачи.

В случае, когда препятствие, огибаемое волной, имеет более сложную форму, задача распространения колебаний сильно усложняется. Решение ее упирается при этом в решение интегродифференциальных уравнений такого типа, который пока еще не изучен в достаточной мере.

А. О. ГЕЛЬФОНД

ТЕОРИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Впервые упоминание о трансцендентных числах содержится в сочинениях Эйлера. В своем «Введение в анализ бесконечно малых», вышедшем в 1748 г., Эйлер без всякого доказательства высказывает утверждение, что логарифмы иррациональных чисел при рациональном или иррациональном основании могут быть только или рациональными или трансцендентными числами.

Не давая строгого определения иррационального числа, Эйлер вкладывает в это понятие примерно то же содержание, какое мы вкладываем в понятие алгебраического числа, называя таковым всякое число, являющееся корнем алгебраического уравнения с целыми рациональными коэффициентами. Числом трансцендентным он называет всякое неалгебраическое число.

Строгое определение и доказательство существования трансцендентных чисел было дано в 1844 г. Лиувиллем, определившим критерий трансцендентности числа. Этот критерий трансцендентности состоит в том, что всякое алгебраическое число α не может как угодно хорошо быть приближено рациональными дробями. Действительно, пусть α алгебраическое число, являющееся корнем алгебраического уравнения n-ой степени, с целыми рациональными коэффициентами, а p и q — два взаимно простых целых числа. Тогда при любых p и q должно быть выполнено неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^{n}},$$

где c — положительная, не зависящая от q константа.

Этот критерий позволил построить примеры трансцендентных чисел. Однако эти примеры были весьма искусственными и к исследованию арифметической природы хорошо известных чисел, в частности классических констант π и e, критерий оказался неприложимым. Следует упомянуть также о более поздних, относящихся к 1874 г., работах Георга Кантора, доказавшего существование трансцендентных чисел, исходя из совершенно других — теоретико-множественных соображений.

Проблема трансцендентности числа π представляла особый интерес, так как она была тесно связана с классической проблемой древности — проблемой квадратуры круга, иначе говоря, с возможностью или невозможностью построения с помощью циркуля и линейки стороны квадрата, площадь которого равна площади данного круга. Действительно, проблема квадратуры круга получила бы отрицательное

решение, если бы оказалось, что число π трансцендентно, так как было известно, что с помощью циркуля и линейки можно строить только корни алгебраических уравнений с целыми рациональными коэффициентами вполне определенного вида.

Первый принципиальный шаг вперед после Лиувилля в теории трансцендентных чисел был сделан Шарлем Эрмитом, применившим классический анализ к исследованию арифметической природы чисел. С помощью специального интегрального тождества, которому удовлетворяет функция e^x, Эрмит доказал в 1873 г. трансцендентность числа e — основания натуральных логарифмов.

Несколько обобщив тождество Эрмита, Линдеманн в 1882 г. доказал трансцендентность чисел вида e^α, где α — алгебраическое число, откуда сразу следует трансцендентность числа π и тем самым отрицательное решение проблемы квадратуры круга.

Тождество Эрмита, благодаря своему весьма частному характеру, оказалось непригодным для решения других проблем в области теории трансцендентных чисел. Общая же идея о связи между аналитической природой функций, арифметическими свойствами ее тейлоровых коэффициентов и ее значений сыграла руководящую роль в дальнейшем.

На всемирном конгрессе в Париже (1900 г.) Д. Гильберт поставил в числе 23 математических проблем, не имевших подхода к своему разрешению средствами современной математики, и проблему, поставленную Эйлером, об арифметической природе логарифма алгебраического числа при алгебраическом основании. Д. Гильберт поставил эту проблему в следующей форме: выяснить арифметическую природу чисел вида α^β, где α — алгебраическое, а β — алгебраическо-иррациональное число.

В ряде работ, относящихся к 1927—1929 гг., я занимался решением различных задач из области арифметических свойств целых функций. В качестве примера я приведу теорему, доказанную в одной из этих работ: если целая функция принимает целые значения вместе со всеми своими производными до порядка p включительно, то можно указать такую границу ее возможного роста, зависящую от p, что если она растет медленнее, то она должна выродиться в полином.

Эти исследования позволили мне развить в конце 1929 г. довольно общий метод подхода к вопросам трансцендентности чисел и доказать трансцендентность чисел вида α^β, где α — произвольное алгебраическое число, а β — корень квадратный из целого отрицательного числа, дав тем самым частичное решение проблемы Эйлера-Гильберта.

Разработанный мною метод заключается в том, что если разложить целую функцию, например $e^{\pi i z}$ в интерполяционный ряд Ньютона с точками интерполяции во всех целых точках гауссова тела, т. е. $z_k = m + ni$, где m и n—целые числа, то коэффициенты такого разложения, являющиеся полиномами от числа e^π, с одной стороны, должны быть малы благодаря малому росту функции $e^{\pi i z}$ и большой плотности точек интерполяции, а с другой стороны, должны быть достаточно велики по чисто арифметическим причинам, если только мы предположим число e^π алгебраическим. Получающееся таким образом противоречие и служит доказательством трансцендентности числа e^π.

Приведенная выше теорема, без существенных изменений в ходе доказательства, была обобщена К. Зигелем и Р. Кузьминым на случай, когда $\beta = \sqrt{p}$, где p — целое число и β — иррационально; кроме того, тем же методом К. Зигель доказал трансцендентность по крайней мере одного из периодов эллиптической функции с рациональными инвариантами. Одновременно с моей работой К. Зигель дал другой метод, приложимый к другому кругу задач в области трансцендентных чисел; в частности, он доказал трансцендентность значений бесселевых функций при алгебраических аргументах.

Различие обоих методов состоит в том, что метод, примененный мною, может

быть пригоден для исследования трансцендентности значений функций, удовлетворяющих определенным типам функциональных уравнений, тогда как метод К. Зигеля пригоден для значений функций, удовлетворяющих некоторым типам дифференциальных уравнений.

При переходе к общей проблеме трансцендентности чисел вида α^β, где β — алгебраическое число степени выше второй, применение моего подхода к исследованию арифметической природы числа наталкивалось на непреодолимые трудности. При β алгебраическом и степени выше второй, нижняя возможная граница коэффициентов ряда Ньютона оказывалась столь малой, что не получалось уже никакого противоречия между величинами возможных границ для этих коэффициентов, определенными арифметическим и аналитическим путями.

Только существенно улучшив этот подход к проблемам трансцендентности, я дал в 1934 г. полное решение проблемы Эйлера-Гильберта, доказав трансцендентность чисел вида α^β при α алгебраическом и β алгебраическом иррациональном или, что то же самое, что логарифмы алгебраических чисел при алгебраическом основании могут быть только или рациональными или алгебраическими числами. Изменение метода состоит в том, что в интерполяционный ряд разлагается не непосредственно порождающая данное трансцендентное число функция, а другая, специально подобранная с помощью принципа Дирихле, связанная с первой, разложение которой в соответствующий интерполяционный ряд имеет большое число первых коэффициентов нулями или очень малыми. Тогда, при предположении алгебраичности входящих в эту функцию констант и ее значений удается рассуждениями несколько более сложными, чем в предыдущем методе, получить противоречие между ее аналитическими и предположительными арифметическими свойствами.

Из других работ, продолжающих эти исследования, я укажу на результаты, полученные мною тем же методом в области приближения трансцендентных чисел алгебраическими, которые могут быть непосредственно использованы в теории диофантовых уравнений и дают возможность получить эффективную границу числа решений в целых числах некоторых типов показательных уравнений с двумя переменными, а также на ряд работ Шнейдера, Малера, Риччи и др., давших доказательства трансцендентности ряда констант, в частности констант, встречающихся в теории эллиптических функций.

Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН

ОБ АДДИТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ЧИСЕЛ

В своем сообщении я в кратких словах изложу некоторые результаты в области аддитивной теории чисел, опубликованных мною частью в 1930, частью в 1933 г.

Примером задач аддитивной теории чисел может служить недавно решенная И. М. Виноградовым задача Гольдбаха: доказать, что нечетное целое число может быть представлено как сумма трех простых. В постановке этой задачи виден характер аддитивных задач: выделена некоторая последовательность чисел — в данном случае простых. Задача заключается в изучении представлений с помощью выделенных чисел других чисел. Обычно при этом накладываются ограничения на число слагаемых.

Основная цель, которую я себе поставил в указанных работах, заключалась в отыскании условий, которые достаточно наложить на последовательность целых чисел $n_1, \ldots, n_k, \ldots$, для того чтобы эта последовательность была базисом натурального ряда, т. е. чтобы всякое натуральное число могло быть представлено в виде суммы ограниченного (не зависящего от разлагаемого числа) количества членов последовательности.

Оказалось, что свойство последовательности быть базисом натурального ряда не связано непременно с правильностью этой последовательности.

Были введены две характеристики: одна, указывающая число членов последовательности $N(x)$, не превосходящих x (функция от x), и другая (тоже функция от x)—средний квадрат числа представлений целых чисел, не превосходящих x, в виде суммы двух членов последовательности.

Если эти характеристики связаны некоторым неравенством, то последовательность есть базис. При этом, если характеристики некоторой последовательности $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ связаны указанным неравенством, то аналогичным неравенством связаны характеристики любой относительно плотной ее подпоследовательности $m_1, \ldots, m_i, \ldots$ (т. е. такой подпоследовательности $m_1, \ldots, m_i, \ldots$, что отношение числа ее членов, не превосходящих x, к числу членов последовательности $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ остается при любом x бо́льшим положительной постоянной α). Такие последовательности были названы сильными базисами.

В качестве применений получились доказательства того, что последовательность простых чисел образует сильный базис (в то время результат этот был нов), последовательность одинаковых степеней натуральных чисел — сильный базис и др.

Вообще, рассмотренный метод применим в случаях двух типов: когда известен закон распределения членов последовательности в арифметических прогрессиях и когда члены последовательности могут быть выражены в форме $f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $f(n)$ — функция, имеющая достаточное число производных, удовлетворяющих некоторым неравенствам.